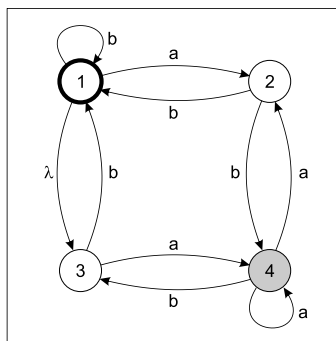
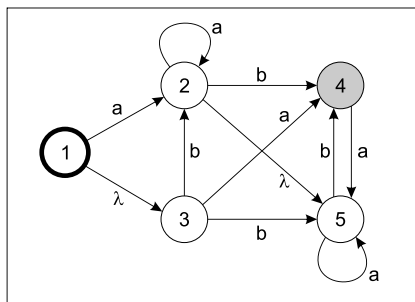


Języki formalne i automaty — kolokwium 1 (17.XII.25)

1. Skonstruuj graf skończonego automatu deterministycznego akceptującego język L_6 liczb binarnych podzielnych przez 6, tworząc go jednak systematycznie jako automat dla przekroju języków $L_2 \cap L_3$, zawierających odpowiednio liczby podzielne przez 2 i przez 3.
2. Zbuduj wyrażenie regularne równoważne automатовi niedeterministycznemu



3. Skonstruuj skończony automat deterministyczny równoważny automатовi niedeterministycznemu

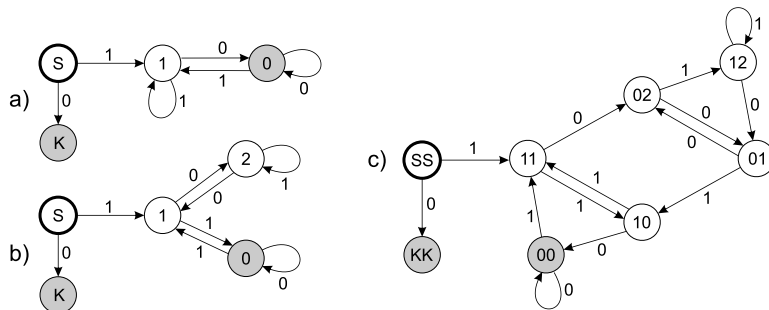


4. Napisz gramatykę regularną dla języka L opisanego wyrażeniem $(a + ab)(aa + bab)^*bb + bab$.
5. Stosując tw. Myhill–Nerode’a lub lemat o pompowaniu dla języków regularnych udowodnij, że

$$L = \{\alpha\#\beta : \alpha, \beta \in \{a,b\}^*, \alpha \neq \beta\}$$

nie jest językiem tej klasy.

Rozwiązania



1. Rys. a) i b) przedstawiają automaty M_2 i M_3 rozpoznające liczby binarne podzielne przez 2 i odp. przez 3. Stany S i K służą do rozpoznania jednocyfrowej liczby 0 (nieznaczące zera w innych liczbach traktowane są jako błąd — takie liczby nie są rozpoznawane). Etykiety stanów 0,1,2 oznaczają odp. reszty z dzielenia przez 2 i 3.

Na podstawie Rys. a) i b) tworzymy tabelkę przejść dla automatu M_6 akceptującego część wspólną języków opisanych przez M_2 i M_3 . Stany automatu M_6 są elementami iloczynu kartezjańskiego $\Sigma(M_2) \times \Sigma(M_3)$, a przejścia dane są przez warunek

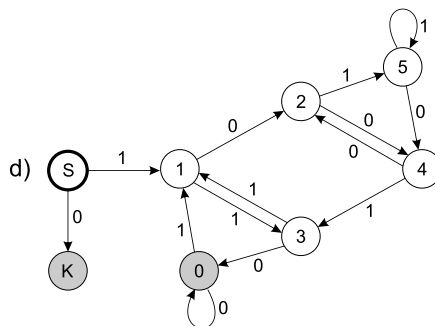
$$(s, s') \xrightarrow{x} (q, q') \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{M_2}(s, x) = q \text{ i } \pi_{M_3}(s', x) = q' \text{ dla } x \in \{0, 1\}.$$

Jeśli automat M_6 znajdzie się w stanie (s, s') , oznacza to, że przeczytana do tej pory liczba binarna daje resztę s z dzielenia przez 2 i s' z dzielenia przez 3.

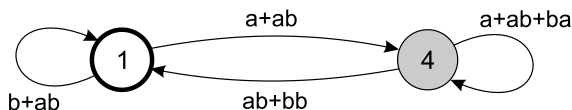
Stany S w obydwu automatach występują tylko podczas czytania pierwszego znaku (żaden z automatów nie wraca nigdy później do tego stanu). Podobnie ze stanami K służącymi do rozpoznania liczby 0 w obydwu przypadkach. Dlatego nie trzeba brać ich pod uwagę przy tworzeniu tabelki, bo żaden ze stanów (S, s) ani (K, s) dla $s = 0, 1, 2$ nie będzie nigdy osiągnięty przez M_6 .

stan	0	1
(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)
(0, 2)	(0, 1)	(1, 2)
(1, 0)	(0, 0)	(1, 1)
(1, 1)	(0, 2)	(1, 0)
(1, 2)	(0, 1)	(1, 2)

Automat M_6 przedstawiony jest na Rys. c). Dla sprawdzenia możemy porównać go z automatem rozpoznającym podzielność przez 6 zbudowanym wprost z definicji, Rys. d).

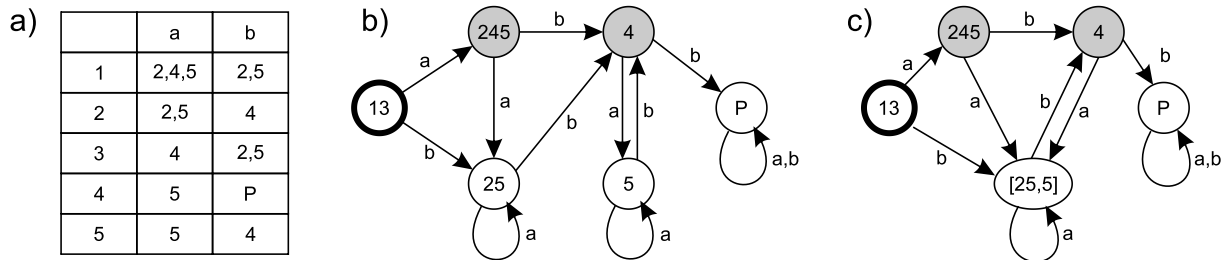


2. Automat po redukcji stanów 2 i 3 oraz odczytane z niego równoważne wyrażenie regularne



$$\omega = (b + ab)^*(a + ab) \left(a + ab + ba + (ab + bb)(b + ab)^*(a + ab) \right)^*$$

3. Równoważny automat deterministyczny (o stanie początkowym $\{1, 3\}$) ma postać b) lub po optymalizacji — c). Stan $[25, 5]$ jest klasą równoważności nierozróżnialnych stanów 25 i 5.



4. Prawostronnie liniowa gramatyka $G(L)$ zawiera następujące produkcje:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow bab \mid aX \mid abX \\ X &\rightarrow aaX \mid babX \mid bb \end{aligned}$$

5. Zastosowanie Tw. Myhilla-Nerode'a: Oznaczmy

$$L_n = \frac{dL}{d(a^n \#)} = \{\beta : \beta \neq a^n\} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Jak widać, jeśli $m \neq n$, wówczas $L_m \neq L_n$, bo $a_n \in L_m$, ale $a_n \notin L_n$ i odwrotnie dla a_m . Zatem liczba różnych pochodnych lewostronnych języka L jest nieskończona, nie może on być tym samym regularny.

Zastosowanie lematu o pompowaniu dla jęz. regularnych: Niech m będzie stałą z lematu i weźmy słowo $\omega = a^m \# a^{m!+m} \in L$. Część podlegająca pompowaniu musi mieścić się wśród początkowych m liter a , a więc ma postać $\beta = a^r$ dla pewnego $1 \leq r \leq m$. Stąd pompowanie produkuje słowa $\omega_k = a^{m+(k-1)r} \# a^{m!+m}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Ponieważ jednak dla $k = m!/r + 1$ mamy

$$m + (k-1)r = m + \left(\frac{m!}{r} + 1 - 1\right)r = m + m!,$$

zatem $\omega_k = a^{m+m!} \# a^{m!+m} \notin L$. Stąd wniosek, że L nie może być regularny.