

Zadania na kolokwium nr 2

Zadanie 1. Spośród 52 kart w tali wylosowano 13. Jakie jest prawdopodobieństwo:

- 5 pików, 4 kierów, 3 trefli i 1 karo
- otrzymania wszystkich kolorów
- otrzymania dokładnie 5 pików

Odp.

a)

$$\frac{\binom{13}{5} \binom{13}{4} \binom{13}{3} \binom{13}{1}}{\binom{52}{13}} \quad (1)$$

b)

$$1 - \frac{1}{\binom{52}{13}} \left(4 \binom{39}{13} - 6 \binom{26}{13} + 4 \binom{13}{13} \right) \quad (2)$$

c)

$$\frac{\binom{13}{5} \binom{39}{8}}{\binom{52}{13}} \quad (3)$$

Zadanie 2. Losując bez zwracania kolejne litery ze zbioru AAEEKMMTTY, jakie jest prawdopodobieństwo ułożenia słowa: MATEMATYKA.

Odp.

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \quad (4)$$

Zadanie 3. Z miasta A do miasta B prowadzi n dróg, z miasta B do miasta C prowadzi m dróg. Na ile sposobów można przejść trasę A-B-C?

Odp. $n \times m$

Zadanie 4. W klasie uczą 10 przedmiotów. W poniedziałek odbywa się 6 lekcji (wszystkie inne). Na ile sposób można rozpiścić plan lekcji na poniedziałek?

Odp. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

Zadanie 5. Ile jest liczb pięciocyfrowych, które dzielą się przez 5?

Odp. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2$

Zadanie 6. Spośród 20 mężczyzn i 5 kobiet wybrano 3 osobową delegację. Zakładamy, że każda osoba miała tę samą szansę wyboru. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w skład delegacji weszła co najmniej jedna kobieta.

Odp.

$$1 - \frac{\binom{20}{3}}{\binom{25}{3}} \quad (5)$$

Zadanie 7. Na loterii jest 10 losów, z których 3 są wygrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 3 zakupionych losów:

a) dokładnie jeden wygrywa,

b) przynajmniej jeden wygrywa?

Odp.

a)

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} \quad (6)$$

b)

$$1 - \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} \quad (7)$$

Zadanie 8. W klasie liczącej 30 uczniów, w tym 12 dziewcząt, 20 uczniów w tym 8 dziewcząt uczy się dodatkowo języka angielskiego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń uczący się angielskiego okaże się chłopcem?

Odp. Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany uczeń uczy się angielskiego, przez C - że jest chłopcem, D - dziewczyną. Szukanym prawdopodobieństwem jest $P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$

$$P(C \cap A) = \frac{12}{30} \quad P(A) = \frac{20}{30} \quad P(C|A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad (8)$$

Zadanie 9. W grupie 360 osób, w tym 270 mężczyzn zdających na wyższe studia techniczne, absolwentami techników jest 40% mężczyzn i 30% kobiet. Z grupy tej wybrano losowo jedną osobę i okazało się, że jest ona absolwentem technikum. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna. **Odp.**

$$\frac{4}{5} \quad (9)$$

Zadanie 10. W pierwszej puszcze są 3 losy wygrywające i 7 przegrywających, w drugiej 5 wygrywających i 4 przegrywające. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadnie mniej niż 3 oczka, to losujemy z pierwszej puszeki, w przeciwnym wypadku z drugiej puszeki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wyciągnięty los jest wygrywający.

Odp.

$$P(Z) = P(p1)P(Z|p1) + P(p2)P(Z|p2) = \frac{1}{3} \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \frac{5}{9} = \frac{127}{270} \quad (10)$$

Zadanie 11. W dwóch urnach znajdują się kule. W urnie pierwszej: 5 kul białych i 3 kule czarne. W urnie drugiej: 5 białych i 4 czarne. Rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie reszka losujemy 2 kule z pierwszej urny, natomiast, jeżeli wypadnie orzeł z drugiej urny losujemy 2 kule. Oblicz

prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul jest co najmniej 1 kula czarna.

Odp. Obliczamy prawdopodobieństwo nie wylosowania kuli czarnej.

$$P(B) = P(U_1)P(B|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} \right) \quad (11)$$

więc

$$P(C) = 1 - P(B) \quad (12)$$

Zadanie 12. Rzucamy dwiema kostkami. Czy zdarzenie A : wyrzucono w sumie parzystą liczbę oczek, i zdarzenie B : wyrzucono razem co najmniej 8 oczek, są zdarzeniami niezależnymi?

Odp.

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{15}{36} \quad P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad P(A)P(B) \neq P(A \cap B) \quad (13)$$

Zadanie 13. Spośród liczb 2, 3, 5, 30 wybieramy losowo jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie, polegające na wylosowaniu liczby parzystej, B - podzielnej przez 3, C - podzielnej przez 5. Z badać niezależność zdarzeń A , B i C .

Odp. $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{4} \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \quad (14)$$

więc

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad P(B \cap C) = P(B)P(C) \quad P(A \cap C) = P(A)P(C) \quad (15)$$

ale

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) \quad (16)$$

Zadanie 14. Strzelcy oddają po jednym strzale do tarczy. Strzelec I trafia z prawdopodobieństwem 0.8, strzelec II - z prawdopodobieństwem 0.9. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że

a) tarcza zostanie trafiona co najmniej raz

b) tarcza została trafiona 2 razy

Odp.

a) 0.98 b) 0.72

Zadanie 15. Rzucamy dwukrotnie kostką. Niech X oznacza sumę wyrzuconych oczek. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X .

Odp.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Zadanie 16. Strzelec strzela raz do celu składającego się z koła i z dwóch koncentrycznych pierścieni. Prawdopodobieństwa trafienia w koło i w pierścienie są odpowiednio równe 0.20, 0.15 i 0.10. Obliczyć prawdopodobieństwo nietrafienia do celu.

Odp. $1-(0.2+0.15+0.1)=0.55$

Zadanie 17. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia z talii 52 kart figury dowolnego koloru lub karty pikowej? (figury to: król, dama i walet)

Odp. $\frac{11}{26}$

Zadanie 18. W szufladzie jest 10 monet po 20 kopiejek, 5 monet po 15 kopiejek i 2 monety po 10 kopiejek. Wyjęto na chybił trafił sześć monet. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość ich sumy nie przekroczy jednego rubla?

Odp.

$$1 - \frac{1}{\binom{17}{6}} \left(\binom{10}{6} + \binom{10}{5} \binom{5}{1} + \binom{10}{5} \binom{2}{1} + \binom{10}{4} \binom{5}{2} + \binom{10}{4} \binom{5}{1} \binom{2}{1} + \binom{10}{3} \binom{5}{3} \right) \approx 0.4 \quad (17)$$

Zadanie 19. Rejestracja samochodowa składa się z 2 liter i 5 cyfr. Ile istnieje różnych rejestracji samochodowych, jeżeli wykorzystujemy 24 litery z alfabetu?

Odp. $24^2 \cdot 10^5$

Zadanie 20. Mamy dwie partie wyprodukowanych przedmiotów, przy czym wiadomo, że wszystkie przedmioty jednej partii odpowiadają wymaganiom technicznym, a $\frac{1}{4}$ przedmiotów drugiej partii jest złej jakości. Przedmiot wzięty z losowo wybranej partii był dobrej jakości. Obliczyć prawdopodobieństwo, że drugi przedmiot wyjęty z tej samej partii będzie złej jakości, jeżeli pierwszy przedmiot po sprawdzeniu zwrócono z powrotem do partii.

Odp. Można postawić dwie hipotezy: H_1 - wzięto partię z przedmiotami złej jakości, H_2 - wzięto partię zawierającą przedmioty dobrej jakości. Zdarzenia A polega na tym, że pierwszy przedmiot jest dobrej jakości. Zgodnie z warunkami zadania mamy $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$, $P(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $P(A|H_2) = 1$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy prawdopodobieństwo zdarzenia A równe

$$P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + 1 \right) = \frac{7}{8} \quad (18)$$

Po pierwszej próbie prawdopodobieństwo, że partia zawiera przedmioty złej jakości, jest równe

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7} \quad (19)$$

Prawdopodobieństwo, że partia zawiera tylko przedmioty dobrej jakości, wynosi

$$P(H_2|A) = \frac{4}{7} \quad (20)$$

Niech zdarzenie B polega na tym, że przy drugiej próbie przedmiot był złej jakości. Prawd. tego zdarzenia także znajduje się ze wzoru na prawd. całkowite. Jeżeli p_1 i p_2 są prawd. hipotez H_1 i H_2 po pokonaniu pomiaru, to zgodnie z poprzednimi obliczeniami $p_1 = \frac{3}{7}$ i $p_2 = \frac{4}{7}$. Ponadto $P(B|H_1) = \frac{1}{4}$, $P(B|H_2) = 0$. A więc szukane prawd.

$$P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{28} \quad (21)$$

Zadanie 21. Rzut X wektora wodzącego punktu losowego okręgu o promieniu a na średnicę ma dystrybuantę

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} & \text{dla } -a < x < a \\ 0 & \text{dla } x \leq -a \end{cases} \quad (22)$$

Obliczyć:

- prawdopodobieństwo tego, że X znajdzie się w przedziale $(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$
- gęstość prawdopodobieństwa

Odp. a)

$$P(-\frac{1}{2}a < X < \frac{1}{2}a) = F(\frac{1}{2}a) - F(-\frac{1}{2}a) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad (23)$$

b)

$$f(x) = \begin{pmatrix} F'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} & \text{dla } x \in (-a, a) \\ 0 & \text{dla reszta} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Zadanie 22. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 1 \\ x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad (25)$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

Odp.

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & \text{dla } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla reszta} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Zadanie 23. Przy jakiej wartości a funkcja

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad (27)$$

jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X ?

- Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej X

b) Znaleźć prawdopodobieństwo trafienia zmiennej losowej X do przedziału $(-1, 1)$.

Odp.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a\pi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi} \quad (28)$$

a)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \frac{1}{\pi} \arctan(t) \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2} \quad (29)$$

b)

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{\pi}(\arctan 1 - \arctan(-1)) = \frac{1}{2} \quad (30)$$

Zadanie 24. Dystrybuanta zmiennej losowej X jest określona następującą tabelką

x	$(-\infty, 0]$	$(0, 3]$	$(3, 4]$	$(4, 7]$	$(7, +\infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.3	0.6	1

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa tej zmiennej. Obliczyć $P(2 \leq X \leq 5)$.

Odp.

$$p_1 = P(X = 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) - F(0) = 0.2 \quad (31)$$

$$p_2 = P(X = 3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) - F(3) = 0.1 \quad (32)$$

$$p_3 = P(X = 4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} F(x) - F(4) = 0.3 \quad (33)$$

$$p_4 = P(X = 7) = \lim_{x \rightarrow 7^+} F(x) - F(7) = 0.4 \quad (34)$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = 0.6 - 0.2 = 0.4 \quad (35)$$

Zadanie 25. Funkcja prawdopodobieństwa wyznaczona jest przez tabelkę:

x_i	3	4	5	6
p_i	0.4	0.1	0.2	0.3

Wyznaczyć:

a) dystrybuantę i jej wykres

b) prawdopodobieństwo $P(X < 4)$

c) prawdopodobieństwo $P(X = 4)$

Odp.

a)

x	$(-\infty, 3]$	$(3, 4]$	$(4, 5]$	$(5, 6]$	$(6, +\infty]$
$F(x)$	0	0.4	0.5	0.7	1

b)

$$P(X < 4) = F(4) = 0.4 \quad (36)$$

c)

$$P(X = 4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} F(x) - F(4) = 0.5 - 0.4 = 0.1 \quad (37)$$