Grupa obrotów

- grupa symetrii kuli, R - wszystkie możliwe obroty o dowolne kąty wokół osi przechodzących przez środek kuli

inaczej $O^+(3)$ – grupa obrotów właściwych

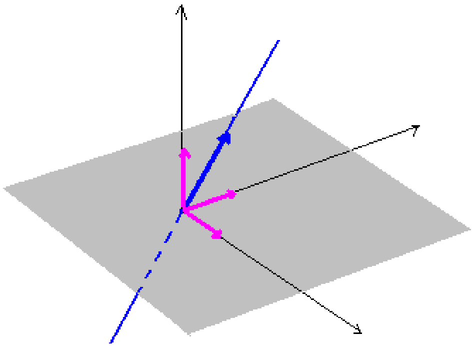
- grupa ciągła

- każdy obrót określa się przez podanie osi l, i kąta obrotu α

  $C_l(\alpha)$

- obrót $C_l(\alpha)$ defniuje się przez podanie wektora

  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$



wzdłuż osi l, i o długości

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2} \le 2\pi$$

$$R \times C_i = R_h$$

tzn. dodanie inwersji do R, tworzy tzw. ***pełną grupę ortogonalną***

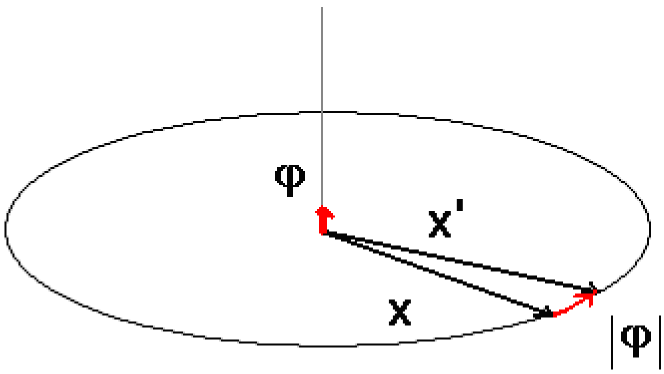
każda skończona grupa punktowa jest podgrupą grupy ortogonalnej

__obroty o *nieskończenie małe kąty*__

obrót o dowolny kąt - ciąg obrotów o dowolnie małe kąty ϕ

dla „małego” ϕ
(X)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \varphi$$



gdzie ϕ można złożyć z 3 obrotów o kąty ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z ,
wokół osi – odpowiednio – x, y, z

zobaczmy jak zmienia się funkcja F(x,y,z) (różniczkowalna) przy „nieskończenie małym obrocie” o ϕ

$$D(\varphi)F(x,y,z) = F(\mathbf{x}') =$$
$$F(x + z\varphi_y - y\varphi_z, y - z\varphi_x + x\varphi_z, z + y\varphi_x - x\varphi_y)$$

rozkładając w szereg Taylora i zachowując tylko wyrazy liniowe

(Y)

$$D(\varphi)F(x,y,z) = F(x,y,z) +$$
$$(z\varphi_y - y\varphi_z)\tfrac{\partial F}{\partial x} + (x\varphi_z - z\varphi_x)\tfrac{\partial F}{\partial y} + (y\varphi_x - x\varphi_y)\tfrac{\partial F}{\partial z} + ..$$
$$= (1 + i\mathbf{L}\varphi)F(x,y,z)$$

(pominąłem dalsze wyrazy ..)

gdzie

$$\mathbf{L} = -i\mathbf{x} \times \nabla$$ (tu **X** = **r**)

jest (z dokładnością do stałej Plancka) operatorem momentu pędu – a tu nazywa się <u>operatorem nieskończenie małego obrotu</u>

można dość łatwo pokazać, że pełne rozwinięcie (Y) daje

$$D(\varphi) = 1 + i(\mathbf{L}\varphi) + \frac{(i(\mathbf{L}\varphi))^2}{2} + ... + \frac{(i(\mathbf{L}\varphi))^n}{n!} + ... = e^{i(\mathbf{L}\varphi)}$$

(*L)

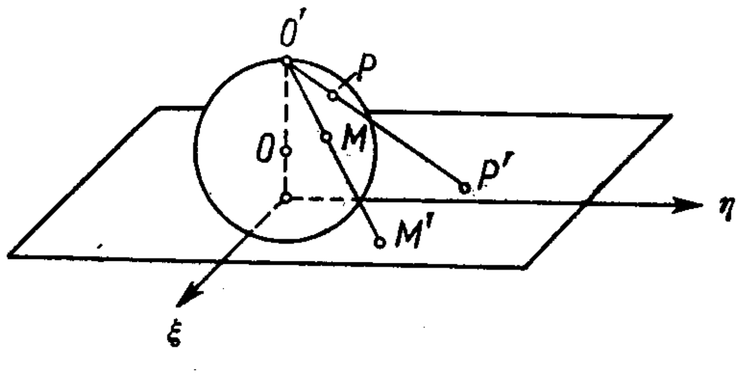
widzimy związki:

- **grupa translacji - operator pędu**
- **grupa obrotów - operator momentu pędu**

<u>przypomnienie nt atomu wodoru;</u>
operator L^2 komutuje z hamiltonianem (atom H jest niezmienniczy wzgl. operacji obrotów o dowolne kąty wokół osi przechodzących przez jądro [w założeniu punktowe lub środek masy]); zatem funkcje własne hamiltonianu muszą być funkcjami własnymi L^2 , a to są funkcje kuliste (* mnożniki zależne od r)

to wiedza o symetrii układu pozwala przewidzieć strukturę funkcji falowych, a teoria reprezentacji (później) pozwoli nam przewidzieć ogólną strukturę widma energii

związek z macierzami Pauliego i spinem



niech kula ma promień jednostkowy i środek w (0,0,0),

każdemu punktowi P kuli przyporządkowujemy pewien punkt płaszczyzny P' o współrzędnych (ζη) lub ($z = \zeta + i\,\eta$) – jako liczbę zespoloną

każdy obrót kuli przeprowadzający punkt P w M przeprowadza P' w M' tzn. (ζη) w (ζ'η') ;
jest to pewne przekształcenie płaszczyzny

można pokazać, że

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \text{(s1)}$$

z zespolonymi współczynnikami, zależnymi od składowych wektora obrotu φ

to przekształcenie płaszczyzny można opisać za pomocą macierzy unitarnej **u**

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \qquad \text{(s2)}$$

i det | u | = 1,

uwaga: unitarność $U^T = U^{-1}$ tzn. $UU^T = I$

każdemu obrotowi można więc przyporządkować macierz unitarną, o dim=2, macierze te tworzą grupę - tzw. *grupę unitarną U*

macierze tych transformacji spełniają dodatkowo warunek

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$$ **z własnością** $aa^* + bb^* = 1$, **a,b – zespolone.**

Takie macierze unitarne tworzą

Grupę *SU(2)*
===========

istnieje związek między SU(2) a $O^+(3)$ – pełną grupą obrotów właściwych

ale nie jest to izomorfizm gdyż, jednemu obrotowi kuli odpowiadają dwa przekształcenia płaszczyzny u oraz -u

jądrem homomorfizmu jest tu podgrupa składająca się z 2 macierzy jednostkowej, I, oraz -I

(rzeczywiście, z (s1) i (s2) wynika, że I i -I prowadzą do tego samego Z')

macierz u odpowiadająca obrotowi o składowych ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z
ma postać (bez dowodu)

$$u(\varphi) = \exp\left[i(\sigma_x\varphi_x + \sigma_y\varphi_y + \sigma_z\varphi_z)/2\right] = \exp\left[i(\sigma\varphi)/2\right]$$

gdzie σ_i - macierze Pauliego

$$\sigma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

(pamiętamy, że obrotowi w $O^+(3)$ odpowiada $e^{i(L\phi)}$)

korzystając z (*L) można pokazać, że

$$u(\varphi) = \mathbf{I}\cos\frac{\varphi}{2} + i\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}\varphi)}{|\varphi|}\sin\frac{\varphi}{2}$$

(wyrazy o potęgach parzystych, korzystając z własności macierzy σ_i , $\sigma_i^2 = 1$, zwijają się do *cos* , a nieparzyste do *sin*)

obrotom wokół osi Z odpowiada:

$$u(\varphi_z) = \mathbf{I}\cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_z \sin\frac{\varphi}{2} = \begin{Vmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{Vmatrix}$$

widać, że obroty o ϕ i $\phi + 2\pi$ mają macierze różniące się znakiem

kontynuując związki:

- **grupa unitarna - operator „spinu"**

def. Grupa podwójna (grupy punktowej)

zbiór macierzy SU(2) odpowiadających operacjom danej grupy punktowej będącej podgrupą $O^+(3)$

Grupa *SU(2)*
===========

grupa macierzy unitarnych postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$ **z własnością**

***aa** + *bb** = 1, a,b – zespolone**

istnieje związek między SU(2) a $O^+(3)$ – pełną grupą obrotów właściwych

fragment dowodu:

1. przypomnijmy macierze Pauliego

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. zdefiniujmy macierz

$$\vec{r} \cdot \vec{\sigma} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{bmatrix} -z & x+iy \\ x-iy & z \end{bmatrix}$$

macierz ta jest hermitowska o znikającym śladzie

3. dokonajmy transformacji podobieństwa na $r\sigma$ za pomocą u $\in$SU(2)

$$u(\vec{r} \cdot \vec{\sigma})u^{-1}$$

można pokazać (*na ćwiczeniach*), że wynik jest też macierzą hermitowską o Tr = 0, zatem musi odpowiadać mu macierz typu

$$\begin{bmatrix} -z' & x'+iy' \\ x'-iy' & z' \end{bmatrix} = \vec{r}\,'\vec{\sigma}$$, dla *r' = (x', y', z')*

zatem powyższej transformacji podobieństwa za pomocą **u** odpowiada jakaś R_u , która w $O^+(3)$ odpowiada jakiemuś obrotowi przeprowadzającemu wektor *r* *w* wektor *r'* .

Odwzorowanie SU(2) -> $O^+(3)$ jest homomorficzne

jądrem tego homomorfizmu są dwie macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

każdemu $R_u \in O^+(3)$ odpowiadają dwie: u, -u $\in$SU(2)

def.

Grupa podwójna (grupy punktowej)

zbiór macierzy SU(2) odpowiadających operacjom danej grupy punktowej będącej podgrupą $O^+(3)$