Grupy punktowe

Wszystkie grupy punktowe można utworzyć z prostych grup C_n przez dołączenie obrotów wokół nowych osi obrotów i odbić w płaszczyznach

Grup punktowych (typów grup) jest skończona ilość, gdyż dodawane osie nie mogą przecinać się pod dowolnymi katami, bo to prowadzi do obrotów o kąty niewspółmierne z 2π (to prowadziłoby do grupy nieskończonej)

jest 14 typów skończonych grup punktowych

Grupa C_n

grupa cykliczna obrotów o kąty $2\pi k/n$ ($k = 0, 1, 2, ..., n-1$)

jeden element tworzący $a = C_n$, tyle klas ile elementów

$$e = a^n$$

Grupa C_{nh}

= grupa C_n + prostopadła do osi płaszczyzna odbicia σ_h

2n - elementów,

$(C_n)^k$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ oraz

$(S_n)^k = (C_n)^k \sigma_h$, $k = 0,1,2,..,n-1$ obrotów zwierciadlanych

abelowa,

jeśli $n = 2k$, to grupa zawiera inwersję $i = \sigma_h (C_n)^{n/2}$

grupa $C_{0h} = C_s = \{ e, \sigma_h \}$,

C_{nh} - jest iloczynem prostym

$$C_{nh} = C_n \times C_s$$

dla n=2k

$$C_{2kh} = C_n \times C_i$$

gdzie $C_i = \{ e, i \}$

grupy C_n są określone przez podanie generatorów

$a = C_n$ i $b = \sigma_h$, oraz związków

$a^n = e, \quad b^2 = e, \quad ab = ba$

dla $n=2k$ b można przyjąć jako i

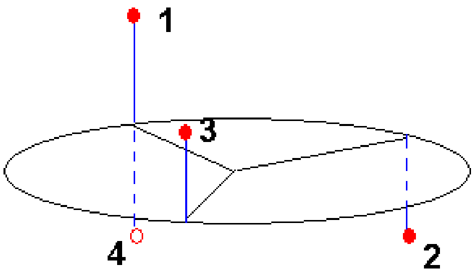
Grupa S_n

grupa składająca się z potęg obrotu zwierciadlanego S_n

$$e, \; S_n , S_n^2 = C_n , \; S_n^3 = \sigma_h C_n^3 , \ldots$$

dla $n= 2k+1$, $S_n = C_{nh}$ i grupa jest rzędu 2n gdyż

$$S_n^{2n} = e, \quad S_n^n = \sigma_h$$



n=3

dla n=2k grupa jest rzędu n, bo $S_n^n = C_n^n = e$,
C_n i σ_h nie wchodzą niezależnie do grupy,
elementami są tylko S_n

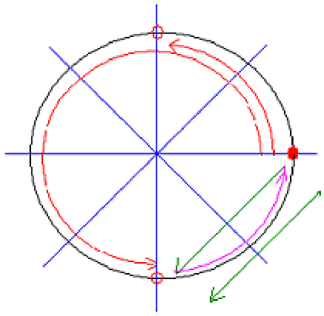
$S_2 = C_i$

Grupy C_{nv}

oś n-tego rzędu + n płaszczyzn odbicia przechodzących przez tę oś

zawierają 2n elementów, n z nich to elementy grupy C_n ,
pozostałe to odbicia w pionowych płaszczyznach

oś jest tu dwustronna, tzn., C_n^k i C_n^{n-k} są sprzężone
(przez złożenie odbić)
np. C_4^1 i C_4^3 , sprzężone przez odbicie w jednej z 4-ech płaszczyzn

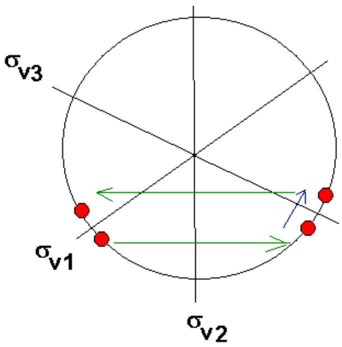


- **jeśli n = 2k to grupa ma (k + 3) klas:**
  e,
  (k-1) klas $\{ C_{2k}^{i} , C_{2k}^{-i} \}$, i=1,..., k-1,
  klasę $\{ C_{2k}^{k} \}$,
  2 klasy po k odbić (dla n=2k, płaszczyzny są parami prostopadłe)

  przy obrotach co druga płaszczyzna pokrywa się

- **jeśli n = 2k+1 to wszystkie płaszczyzny są równoważne i odbicia w nich tworzą jedną klasę ponadto w grupie jest n-1 klas obrotów i klasa elementu e**

np. dla k=1, tzn. n=3: $\sigma_{v1} = (\sigma_{v2})^{-1}\, \sigma_{v3}\, \sigma_{v2}$



przy obrotach płaszczyzny przechodzą nawzajem w siebie

Grupa D_n

Zawiera C_n (oś n-krotną) oraz
n osi 2-go rzędu, prostopadłych do osi n-krotnej
(osie te oznaczamy u_2)

zawiera 2n elementów (n –obrotów wokół osi n-krotnej,
jednym z nich jest element e)
oraz (n obrotów wokół osi 2-go rzędu)

D_n ← izomorfizm → C_{nv}

(rys. przykład D_2 , zachowanie gupowe)

Grupa D_{nh}

D_{nh} = D_n + płaszczyzna odbicia σ_h prostop. do osi n-krotnej

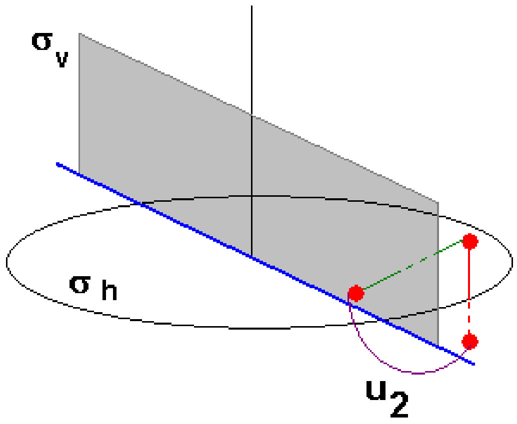
Przyłączenie poziomej płaszczyzny odbicia powoduje automatyczne dodanie n pionowych płaszczyzn zawierających oś n-krotną

Zaiera 4n elementów:

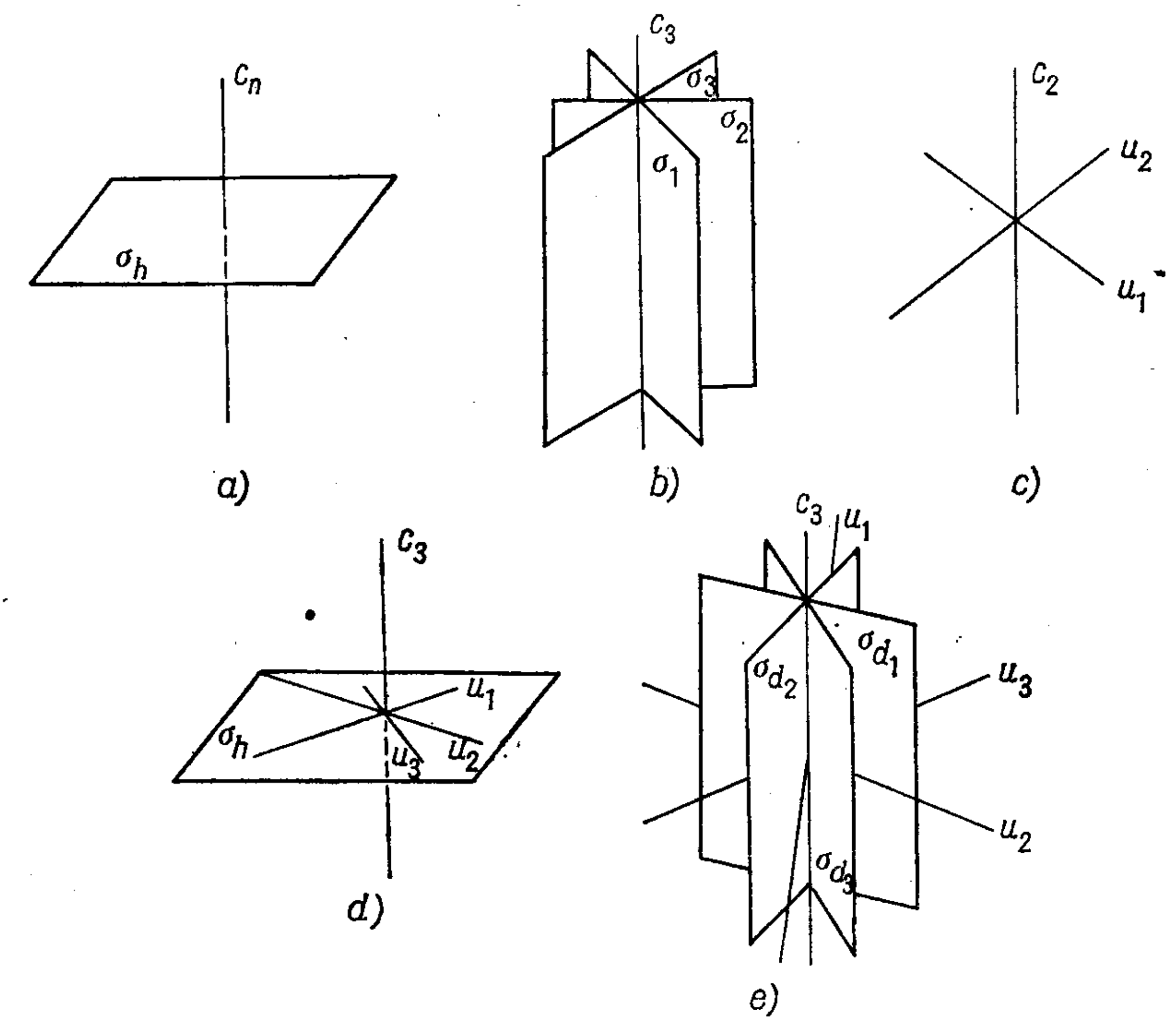
2n - elementów grupy D_n

2n - iloczynów typu $u_2\sigma_h = \sigma_v$

(rysunek --->)



$$D_{nh} = D_n \times C_s$$



Elementy symetrii grup punktowych. **a)** C_{nh}; **b)** C_{3v}; **c)** D_2; **d)** D_{3h}; **e)** D_{3d}.

gdy n = 2p, mamy 3 generatory: C_n , u_2 , σ_h

gdy n = 2p+1, są 2 generatory: S_n , u_2

Grupa D_{nd}

Otrzymuje się przez dołączenie do grupy D_n , n *diagonalnych* płaszczyzn odbicia, zawierających oś n-krotną , ale usytuowanych pomiędzy osiami u_2

zawiera 4n elementów

odbicia w płaszczyznach diagonalnych ozn. σ_d

dla $n = 2p+1$ $\quad D_{2p+1,d} = D_{2p+1} \times C_i$

grupa jest izomorficzna z D_{2n}

grupa ma 2 elementy tworzące: $a = S_{2n}$, $b = u_2$

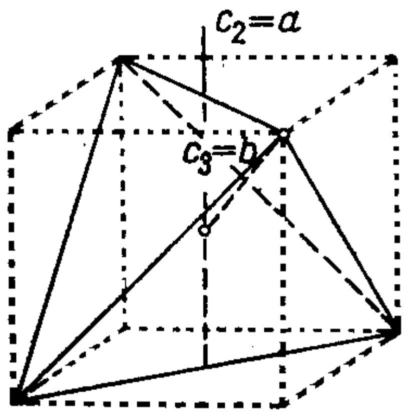
Grupa T

Grupa <u>obrotów</u> przeprowadzających czworościan w siebie

grupa ma 12 elementów

e, $3\,c_2$, $4\,c_3$, $4\,c_3^{\,2}$

elementy te związane są z 3-ma osiami 2-krotnymi (krawędź-krawędź) i 4-ma osiami 3-krotnymi (wierzchołek-ściana)



grupa zawiera 4 klasy (jak wyżej),

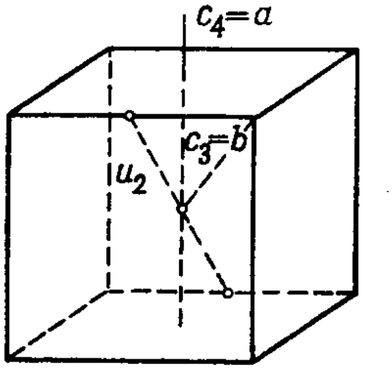
dwa elementy tworzące $a = c_2$ $\quad b = c_3$

Grupa T_h

$$T_h = T \times C_i$$

Grupa O

grupa obrotów przeprowadzających sześcian w siebie



3 osie 4-krotne (ściana-ściana)
4 osie 3-krotne (przeciwległe wierzchołki)
6 osi 2-krotnych u_2 (środki przeciwległych krawędzi)

w rezultacie zawiera 24 elementy w 5-ciu klasach

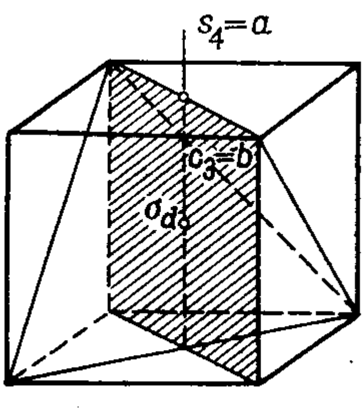
$$(e),\ (4C_3 , 4C_3^2),\ (3C_4 , 3C_4^3),\ (3C_4^2),\ (6u_2)$$

dwa elementy tworzące: $a = C_4$, $b = C_3$

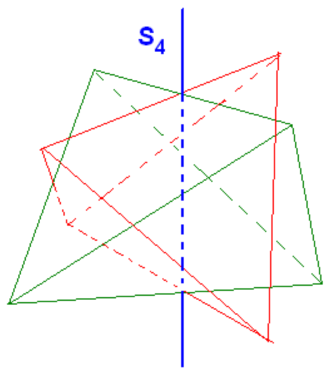
Grupa T_d

Pełna grupa symetrii czworościanu

T + odbicia w płaszczyznach zawierających dwa wierzchołki i środek przeciwległej krawędzi



Zawiera 24 elementy (12 z grupy T) + 6 odbić w płaszczyznach σ_d , i 6 obrotów zwierciadlanych: 3 S_4 i 3 S_4^3



T_d - izomorficzna z - O

Posiada 5 klas
(grupa punktowa kryształów o strukturze blendy cynkowej)

Grupa O_h

Pełna grupa symetrii sześcianu
(O + inwersja)

$$O_h = O \times C_i = T_d \times C_i$$

48 elementów w 10 klasach

dwa generatory, np. C_4 i S_6

---

omówiliśmy 12 grup punktowych (typów grup)
(w sumie jest ich 14 ale dwie g.p. dwudziestościanu nie mają zastosowania w symetrii kryształów)