

Translacje

translacja o wektor a , t_a

$$t_{-a} = (t_a)^{-1}$$

$$t_a t_b = t_b t_a = t_{a+b}$$

translacje tworzą grupę abelową
grupa translacji G jest izomorficzna do grupy wektorów H , w której operacją składania jest dodawanie wektorów (elementem jednostkowym w H jest wektor 0)

jedno/dwu/trój/wymiarowa grupa translacji G ,
gdy $\dim(H) = 1/2/3$

Grupa afiniczna - grupa zawierająca wszystkie translacje oraz wszystkie transformacje *ortogonalne* przestrzeni (3D) w siebie

- grupa czystych translacji jest jej podgrupą

Grupa przestrzenna G_P -

to podgrupa grupy afinicznej, w której translacje są typu

$$\{E, \vec{t}_n\}, \quad \vec{t}_n = n_1 \vec{t}_1 + n_2 \vec{t}_2 + n_3 \vec{t}_3$$

\vec{t}_i – trzy niezależne wektory,

ozn. zawiera obroty, odbicia i translacje sieciowe;

Grupa punktowa grupy przestrzennej to podgrupa przekształceń ortogonalnych grupy G_P

każdy element w grupie przestrzennej $g = t_a r$,
gdzie r - odbicie, obrót lub obrót zwierciadlany

$g = t_a r$ zapisujemy jako $(r|a)$

(translacja może być o wektor \parallel , \perp , lub dowolny inny)

grupa przestrzenna zawiera nowe elementy:

- osie śrubowe
- płaszczyzny poślizgu

(co to znaczy nowe elementy... - przejście punktów układu w punkty równoważne, inaczej niż poprzez r lub poprzez t_a)

Niech r - obrót wokół osi l : $C_l(\alpha)$;
rozkładając a na

$$a = a_{\perp} + a_{\parallel}$$

tzn., składowe prostopadłe i równoległe do osi

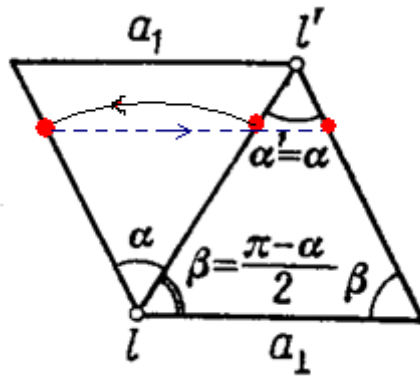
wówczas
$$g = t_{a_{\parallel}} t_{a_{\perp}} C_l(\alpha)$$

.. mamy tu jednocześnie z obrotem – przesunięcie wzdłuż osi, oraz przesunięcie prostopadłe do osi..

Tw. Chaslesa:

Każde przekształcenie w płaszczyźnie, z $\alpha \neq 0$, jest czystym obrotem wokół pewnej osi l' , a dla $\alpha = 0$, jest czystą translacją

żeby znaleźć punkt położenia osi l' , rysujemy wektor a_{\perp} , a następnie z punktu l i końca wektora a_{\perp} poprowadzić proste pod kątami $(\pi-\alpha)/2$



dla przykładu weźmy dowolny punkt z odcinka (l, l')

Zatem

$$t_{\mathbf{a}_\perp} c_l(\alpha) = c_{l'}(\alpha)$$

i ostatecznie taki element w grupie przestrzennej można zawsze zapisać jako

$$g_s = t_{\mathbf{a}_\parallel} c_{l'}(\alpha),$$

a to definiuje **przekształcenie śrubowe**

.....

płaszczyzna poślizgu - złożenie odbicia i przesunięcia na płaszczyźnie;

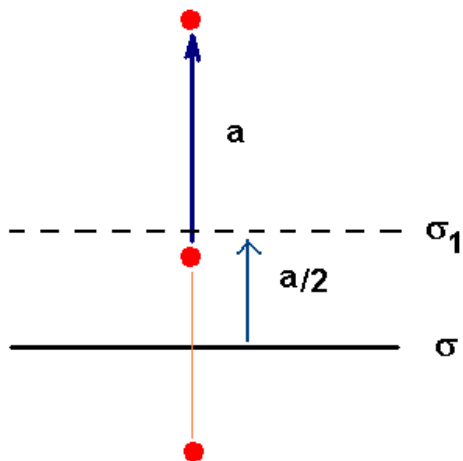
rozkładając ponownie

na składową prostopadłą do płaszczyzny i równoległą

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel$$

mamy:

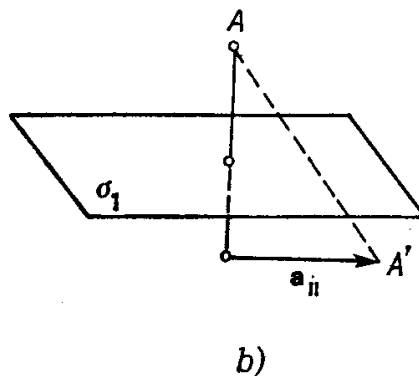
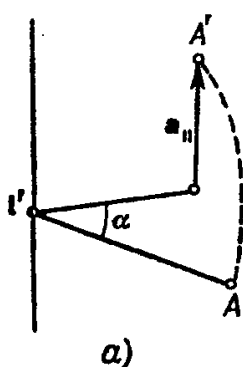
$$t_{\mathbf{a}_\perp} \sigma = \sigma_1$$



gdzie σ_1 jest odbiciem w płaszczyźnie \parallel do σ i odległej o $\frac{1}{2}$ składowej prostopadłej a , ostatecznie mamy:

$$g_p = t_{a_{\parallel}} \sigma_1$$

które jest odbiciem z poślizgiem.



W ogólności każdy element grupy przestrzennej to g_p lub g_s

(w których w szczególnych przypadkach Γ , σ lub \mathbf{t} , mogą być zerowe)

Elementy sprzężone do translacji t_a - to translacje o wektor otrzymany z działania na niego wszystkimi innymi operacjami typu obrotowego z grupy punktowej:

(A)

$$r t_a r^{-1} = t_{ra}$$

trywialny dowód: ($r^{-1}\mathbf{x}$ to pewien wektor \mathbf{y})

$$rt_{\mathbf{a}}r^{-1}\mathbf{x} = r(r^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \mathbf{x} + r\mathbf{a}$$

z (A) wynika też, że

$$rt_{\mathbf{a}} = t_{r\mathbf{a}}r$$

(translacje i obroty nie koniecznie są przemienne)

Prawo mnożenia elementów grupy przestrzennej $g = (r | \mathbf{a})$

$$g_1g_2 = t_{\mathbf{a}_1}r_1t_{\mathbf{a}_2}r_2 = t_{\mathbf{a}_1}(r_1t_{\mathbf{a}_2})r_2 = t_{\mathbf{a}_1}t_{r_1\mathbf{a}_2}r_1r_2 = t_{\mathbf{a}_1+r_1\mathbf{a}_2}r_1r_2$$

lub inaczej

$$(r_1 | \mathbf{a}_1)(r_2 | \mathbf{a}_2) = (r_1r_2 | \mathbf{a}_1 + r_1\mathbf{a}_2).$$

Przekształcenia symetrii zmieniają położenia punktów, tj. np. ich współrzędne kartezjańskie x, y, z na x', y', z' ,

oznaczając

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$$

mamy

$$\mathbf{x}' = r\mathbf{x} = R(r)\mathbf{x}$$

$$x'_i = \sum_s R_{is}(r)x_s$$

jako liniową transformację współrzędnych;

$R(r)$ jest macierzą rzeczywistą, $\dim R = 3$

R - zachowuje długości wektorów i kąty między nimi, to R jest macierzą ortogonalną

$$R^T = R^{-1}$$

tzn. spełniona jest relacja ortogonalności

$$\sum_s R_{is}^T(r) R_{sk}(r) = \delta_{ik}$$

Jeśli dokonamy transformacji układu współrzędnych (a nie transformację współrzędnych punktu w nieruchomym układzie współrzędnych), to odpowiada temu transformacja R^T

ponieważ, $\det R^T = \det R$, a $RR^T = I$, ($I = 1$), zatem

$$(\det R)^2 = 1 \Rightarrow \det R = \pm 1$$

dla czystych obrotów $\det R = 1$ (obroty właściwe)
dla przekształceń II-go rodzaju $\det R = -1$ (obroty niewłaściwe)

macierze R tworzą grupę

grupa macierzy R jest izomorficzna z grupą punktową przekształceń

składaniu elementów grupy (przekształceń) odpowiada zwykle mnożenie macierzy

$$R(r_1 r_2) = R(r_2)R(r_1)$$

translacja to:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

a przekształcenie t_{ar} :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a} + R(r)\mathbf{x}$$

Tw.

W grupie transformacji ortogonalnych zawierających obroty niewłaściwe, zbiór obrotów właściwych stanowi zawsze podgrupę

dowód – oczywisty biorąc pod uwagę własności macierzy R .

Zobaczmy jak translacja wpływa na funkcje współrzędnych; weźmy dowolną funkcję

$$f(\mathbf{x})$$

i zbadajmy $f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \right) a_i + \dots$$

ale $\mathbf{p} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}/\hbar} f(\mathbf{x}) \quad (*)$$

zatem translacji t_a o wektor a argumentu funkcji f , odpowiada operacja (*) na funkcji f , lub inaczej operator T_a

możemy zapisać:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \mathbf{T}_a f(\mathbf{x}).$$

Jeśli $f(\mathbf{x})$ jest funkcją własną \mathbf{p} , to wartościami własnymi T_a

będą $e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}}$, gdzie wartość własna operatora pędu to $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$;

pojawia się pojęcie wektora falowego k , jako liczby (w ogólności trójki liczb – współrzędnych k) numerującej wartości własne operatora translacji

k – liczba kwantowa

albo inaczej:

jeśli $f(x)$ jest funkcją własną T_a , $T_a f(x) = \lambda f(x)$, $\lambda = e^{ika}$, to $f(x)$ jest funkcją własną operatora pędu (tu: współrzędnej p_x)

związek niezmienniczości względem przesunięć i zasady zachowania pędu (twierdzenie Noether)