Przekształcenia symetrii

(w 3D)

przekształcenia elementarne

- **obroty**
- **odbicia w płaszczyźnie**
- **translacje**

przekształcenia te tworzą grupy: grupy symetrii danych obiektów (atomów, molekuł, brył, ciał, kryształów,...)

pojęcie**:**
***zbiór punktów nieruchomych* – danego przekształcenia symetrii**

obroty i odbicia mogą posiadać punkty nieruchome – ale ich złożenia (iloczyny) nie muszą

ciała o skończonych rozmiarach mają zawsze jeden punkt nieruchomy,
ich grupy symetrii nie mogą zawierać translacji;

translacje dotyczą obiektów nieskończonych i periodycznych.

Przekształcenia symetrii (elementy grup symetrii) przeprowadzają obiekty w siebie (punkty obiektów w punkty równoważne lub w te same punkty)

obroty – przykład tworzenia grupy

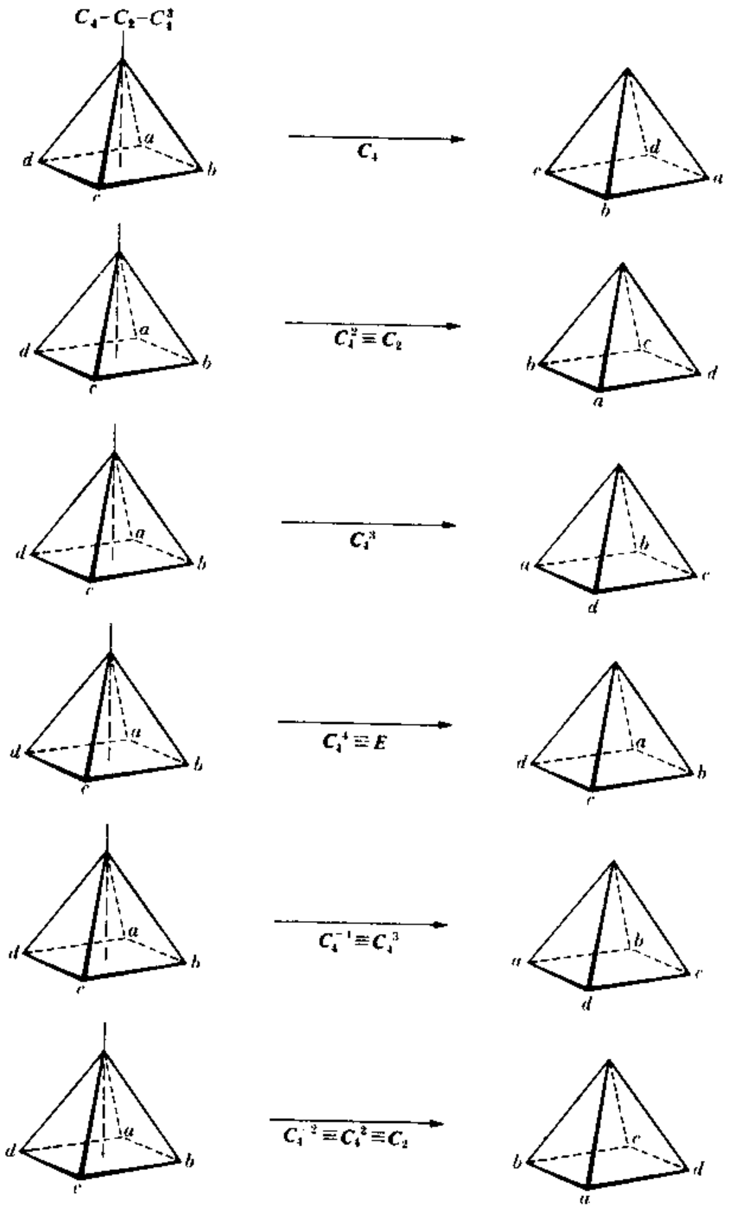


FIG. 2-3.1. Rotation.

odbicia – przykład

(drugi przykład to też odbicia trójkąta równobocznego na płaszczyźnie ale uwaga: same odbicia nie tworzą grupy)

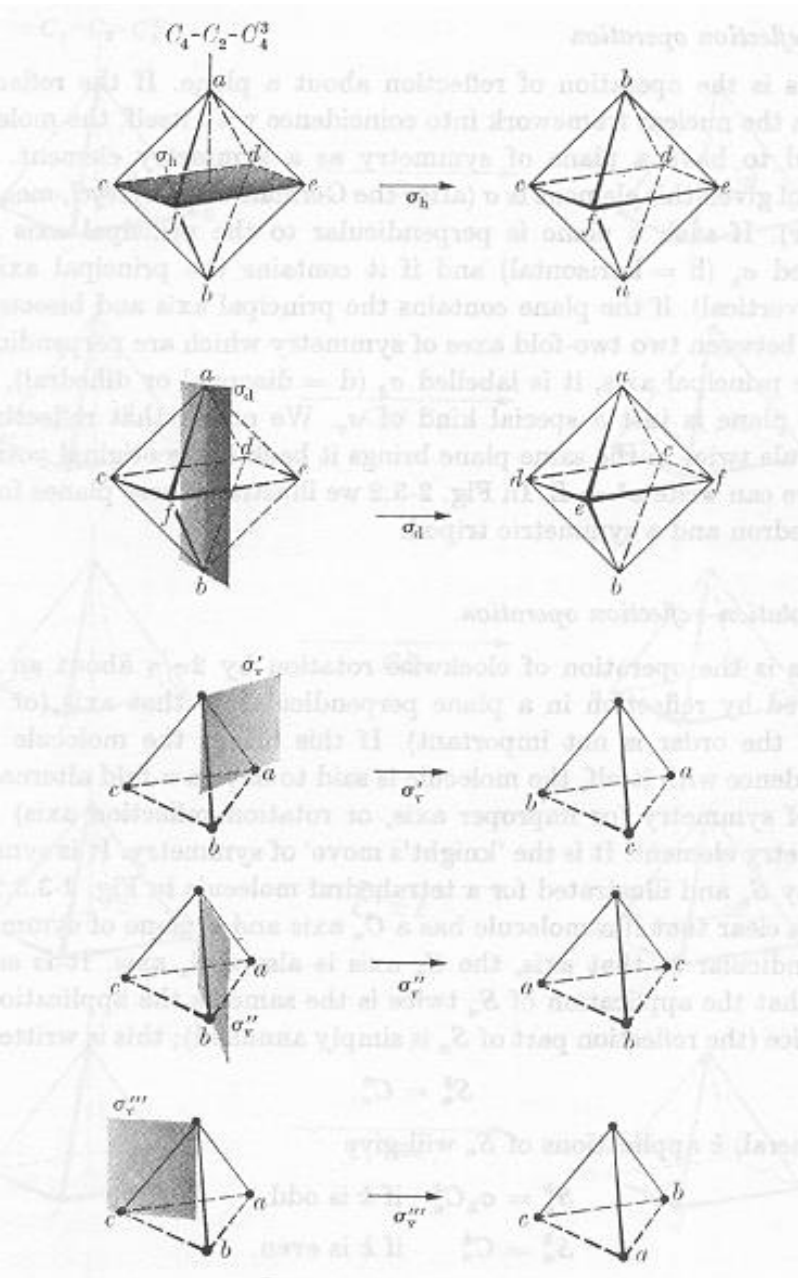


FIG. 2-3.2. Reflection.

<u>def.</u>
<u>Grupa punktowa</u>
grupa symetrii zachowująca punkt nieruchomy

w grupie punktowej, wszystkie osie obrotów i płaszczyzny symetrii przecinają się w jednym punkcie – w punkcie nieruchomym

niech α będzie kątem = $2\pi / n$

obrót o kąt α nazwijmy c(α) [lub **c_n**]

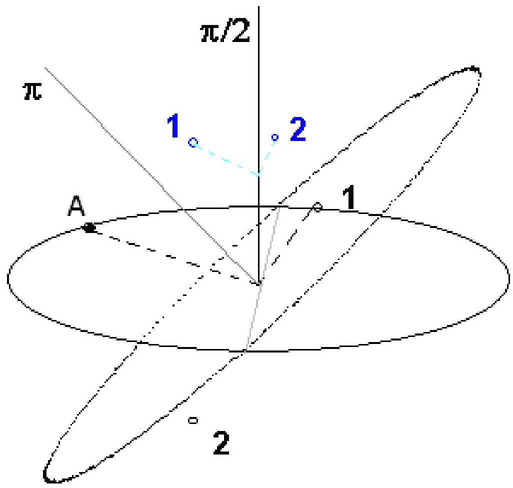
wykonanie n obrotów to $c^n(\alpha) = e$

zbiór obrotów o kąt α wokół zadanej osi tworzy grupę cykliczną C_n .

jeśli α nie jest współmierny z 2π , i obrót o α zachowuje symetrię to mamy dopuszczone obroty o dowolne kąty, grupa zawiera nieskończenie elementów i mówimy o *symetrii osiowej*

iloczyn obrotów wokół przecinających się osi też jest obrotem wokół pewnej osi

obroty (wokół różnych osi) na ogół nie są przemienne
(zaczynamy od **A**)



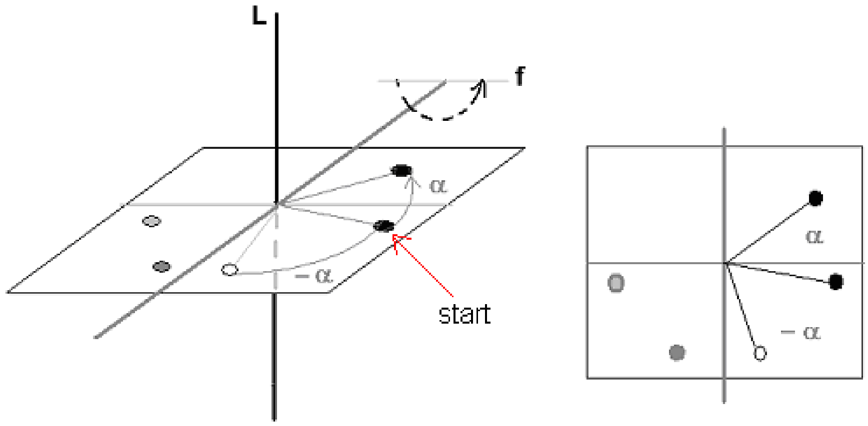
<u>Tw.</u>

jeśli $C_l(\alpha)$ jest obrotem o α wokół osi l, a f - oznacza dowolny obrót $\Rightarrow$

$$f\,C_l(\alpha)\,f^{-1} \text{ jest obrotem o } \alpha \text{ wokół osi } fl$$

$f\,C_l(\alpha)\,f^{-1}$ - oznacza się jako $C_{fl}(\alpha)$

przykład



(*tu:obrót o (- α) to obrót wokół osi fl*)

dowód:

1. **fl pozostaje nieruchoma przy przekształceniu $f\,C_l(\alpha)\,f^{-1}$**

$$f\,C_l(\alpha)\,f^{-1}(fl) = f\,C_l(\alpha)\,l = fl$$

2. **pokazać, że $f\,C_l(\alpha)\,f^{-1}$ obraca o α**

niech x - wektor ⊥ l, i przecinający oś l , oczywiście

$$\alpha = \text{kąt}\,(x, C_l(\alpha)x)$$

zanalizujmy kąt (fx, $fC_l(\alpha)x$)

f nie zmienia kątów między wektorami, zatem fx ⊥ fl , i zachowany będzie też kąt między fx i $fC_l(\alpha)x$ i będzie równy α , ale $fC_l(\alpha)x = fC_l(\alpha)f^{-1}fx$, zatem kąt między fx i $fC_l(\alpha)f^{-1}fx$ też będzie równy α, czyli jest to obrót fx wokół fl , właśnie o szukany kąt, zatem rzeczywiście $f\,C_l(\alpha)\,f^{-1}$ obraca o α.

Tw.
Jeśli dwie osie *l* i *l'* tworzą kąt α , to złożenie 2 obrotów o π wokół *l* i *l'* daje obrót o 2α wokół *l"* prostopadłej do *l* i *l'*

Własności odbić

$$\sigma^2 = e$$

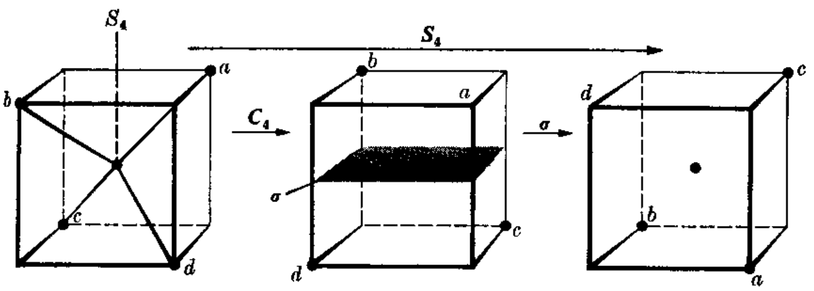
def

obrotem zwierciadlanym S_n nazywamy przekształcenie składające się z obrotu C_n i odbicia σ_h w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu

$$S_n = \sigma_h C_n = C_n \sigma_h$$

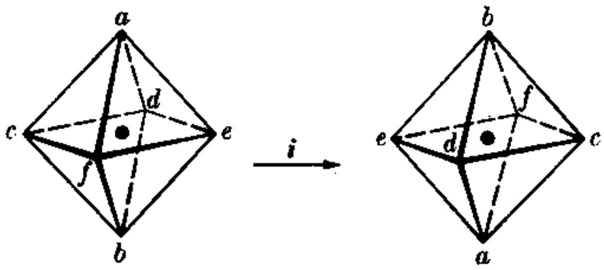
$$(S_n)^2 = (C_n)^2$$

$$\sigma_h C_n = S_n$$



to jest pewno nowe przekształcenie symetrii

Inwersja „i" - przypadek szczególny dla n=2

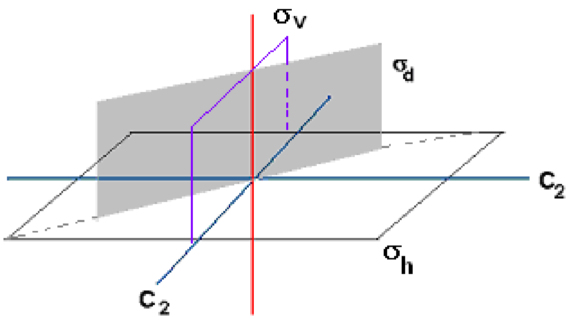


Przy inwersji, każdy wektor a przechodzi w -a

Inwersja jest przemienna ze wszystkimi obrotami i odbiciami

σ_v - odbicie w płaszczyźnie zawierającej oś obrotu

σ_d - odbicie w płaszczyźnie zawierającej oś obrotu, ale jednocześnie rozdzielającej (diagonalnie – *d*) dwie prostopadłe osie 2-krotne



Elementy grup obrotów – elementy I-go rodzaju (obroty właściwe)

Elementy grup zawierające odbicia - elementy II-go rodzaju

Każdy element, h, II-go rodzaju można przedstawić jako

$$h = i\,f = f\,i$$

gdzie f - jest obrotem

Jeśli $C_l(\alpha)$ jest obrotem o α wokół osi l, a $h = if$ jest dowolnym elementem II-go rodzaju (f - dowolny obrót) to

$$h\,C_l(\alpha)\,h^{-1} = C_{hl}\,(-\alpha)$$

(jako uogólnienie twierdzenia poprzedniego – bez inwersji)

jest tak ponieważ,

$$h\,C_l(\alpha)\,h^{-1} = if\,C_l(\alpha)\,f^{-1}\,i = C_{fl}(\alpha) = C_{-hl}(\alpha) = C_{hl}(-\alpha)$$

(inwersja jest przemienna z wszystkimi operacjami)
(f = ih – czyli odwrócenie osi po operacji h)

podobnie:

$$f\,S_l(\alpha)\,f^{-1} = S_{fl}\,(\alpha)$$

$$h\,S_l(\alpha)\,h^{-1} = S_{-hl}\,(\alpha)$$

Oś dwustronna: - obroty o α i $-\alpha$ są wzajemnie sprzężone,
[tzn. istnieje przekształcenie f, które $C(-\alpha) = f\, C(\alpha)\, f^{-1}$]

tym elementem f może być obrót o π wokół osi prostopadłej
lub płaszczyzna odbicia σ_V
(np. ta zdefiniowana na żółto na rysunku)