Reprezetacje grupy obrotów

wiemy już, że dowolny obrót można złożyć z obrotów o nieskończenie małe kąty
a
operator opisujący przekształcenie funkcji współrzędnych
F(x,y,z) przy obrocie o kąt φ jest określony przez operator (generator) nieskończenie małego obrotu, *L* (oper. momentu pędu)

$$D(\varphi) = e^{i\mathbf{L}\varphi}$$

gdzie $\varphi = (\varphi_x , \varphi_x , \varphi_x)$

macierze reprezentacji będą miały zatem postać
(A1)

$$\mathrm{D}(\varphi) = e^{i\mathbf{A}\varphi}$$

gdzie $\mathbf{A} = (A_x , A_y , A_z)$ macierze nieskończenie małych obrotów wokół osi x, y, z

D – są unitarne, natomiast A – są hermitowskie

$D^+=D^{-1}$, ale $D^{-1}=\exp(-iA\varphi)$ i również $D^+=\exp(-iA^+\varphi)$ => A musi = A^+ .

[jest tak ponieważ,
z formalnego punktu widzenia jeśli D jest macierzą pewnej reprezentacji grupy obrotów dla elementu obrotu o kąt φ , to po rozwinięciu w szereg

$$\mathbf{A}_\mathbf{x} = \frac{1}{i}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \varphi_\mathbf{x}}\Big|_{\varphi_\mathbf{x}=0}$$ i podobnie dla **y, z**

pochodną należy rozumieć jak pochodną dla elementów D,
(oczywiście rozważamy tylko takie reprezentacje, które są różniczkowalnymi funkcjami kątów)]

z własności grupowych oraz z faktu, że (A1) dla małych φ ma postać $D(\varphi) = I + i(A\varphi)$
można wyprowadzić pewne własności komutacyjne dla

A_x , A_y , A_z

$$\mathbf{A}_x\mathbf{A}_y - \mathbf{A}_y\mathbf{A}_x = i\mathbf{A}_z$$

i analogicznie dla innych składowych...

te związki komutacyjne wyprowadza się wiedząc jak wygląda D dla małego obrotu, np o kąt (φ_x,0,0) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_x \\ 0 & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix}$ **,** [cos (małego kąta φ) ~ 1, sin ~ φ]

oraz analogiczne dla macierzy

$A_+ = A_x + iA_y$, $A_- = A_x - iA_y$, $A_z = A_3$

te własności komutacyjne są takie same jak dla składowych operatora momentu pędu

Jako bazy reprezentacji można zatem wybierać wektory własne A_3

$$Y_m^j$$

które spełniają

$$\mathbf{A}_3^j Y_m^j = mY_m^j$$

$$\mathbf{A}_+^j Y_m^j = \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,Y_{m+1}^j$$

$$\mathbf{A}_-^j Y_m^j = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,Y_{m-1}^j$$

dla danego *j* - istnieje 2j+1 funkcji (indeks *m*)
m = -j, -j+1, ...,j-1, j
transformujących się między sobą

***j* - nazywa się wagą reprezentacji**

***j* - 0, ½, 1, 3/2, 2, ...**

tylko A_3 są diagonalne w tej bazie

łatwo zauważyć, że przy obrocie o kąt φ wokół osi z , macierz D ma postać (A2)

$$\mathrm{D}_j(\varphi) = \begin{Vmatrix} e^{ij\varphi} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i(j-1)\varphi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(j-2)\varphi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-ij\varphi} \end{Vmatrix}$$

dla j – całkowitego, macierze A, to macierze składowych operatora momentu pędu w reprezentacji, w której L_z jest diagonalne

np. dla *j*=1, funkcje realizujące reprezentację D_1 możemy wziąć jako

$$Y_0^1 = z, \qquad Y_1^1 = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}}, \qquad Y_{-1}^1 = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}$$

lub każde trzy funkcje transformujące się tak samo jak powyższe, np:

$$Y_0^1 = ze^{-ar}, \qquad Y_1^1 = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}}e^{-ar}, \qquad Y_{-1}^1 = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}e^{-ar}$$

gdzie $\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}$

reprezentacja A_3 jest diagonalna $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a reprezentacja A_+ jest $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

charaktery w (A2) są

(A3)

$$\chi\,(\varphi) = \sum_{m=-j}^{m=j} e^{im\varphi} = \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$

Dla *j* – połówkowego - nie istnieją reprezentacje (bazy) jako funkcje współrzędnych x,y,z ...

w szczególnym przypadku *j* = ½

$$\mathbf{A}_x^{1/2} = \tfrac{1}{2}\sigma_x, \qquad \mathbf{A}_y^{1/2} = \tfrac{1}{2}\sigma_y, \qquad \mathbf{A}_z^{1/2} = \tfrac{1}{2}\sigma_z$$

- macierze Pauliego.

Jeśli hamiltonian układu komutuje z operatorem momentu pędu (tzn., że układ jest niezmienniczy ze względu na obroty)

[H,L]=0

to H i L mają wspólne funkcje własne,

ponieważ funkcje stanowiące bazy reprezentacji grupy obrotów transformują się między sobą, zatem stanowią bazy podprzestrzeni, tzn. wyznaczają podprzestrzenie odpowiadające zdegenerowanym wartościom własnym H

przypomnienie:
jeśli [A,H]=0, wówczas $H(Af_i) = AHf_i = AEf_i = E(Af_i)$, tzn. że operatory symetrii A działając na f_i wygenerują funkcje $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ należące do zdegenerowanej wartości własnej E; będą to funkcje bazowe nieredukowalnych reprezentacji

Iloczyn prosty reprezentacji nieprzywiedlnych D_{j1} i D_{j2} jest reprezentacją grupy obrotów, o wymiarze

$(2j_1 + 1)\,(2j_2 + 1)$

w ogólności jest ona przywiedlna

z tożsamości

$$\sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(2m+1)=(2j_1+1)(2j_2+1)$$

(jako suma szeregu arytmetycznego)

oraz pamiętając, że dla małych obrotów

$\chi_j(\varphi) = 2j + 1$ **(dla φ infinitezymalnie małego)**

mamy (pamiętając o relacjach dla charakterów iloczynu reprezentacji – charakter iloczynu = iloczynowi charakterów)

$$\sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\chi_m=\chi_{j_1\times j_2}$$

zatem (A5)

$$\sum_{m=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\mathrm{D}_m=\mathrm{D}_{j_1}\times\mathrm{D}_{j_2}$$

otrzymujemy rozkład iloczynu reprezentacji na reprezentacje nieprzywiedlne

- znaczenie przy składaniu momentów pędu

składając momenty pędu L_1 i L_2 dwu podukładów danego układu fizycznego, wypadkowy moment pędu jest sumą $L = L_1 + L_2$; funkcje bazy reprezentacji można więc utworzyć jako iloczyny baz tworzących reprezentacje L_1 i L_2 ,
rozkład (A5) mówi nam jakie są możliwe wypadkowe L