Przypomnijmy:

twierdzenie Burnside'a

$$\sum_{a=1}^{N} n_a^2 = h$$

n_a **- wymiary reprezentacji nieredukowalnych (jest ich *N*) grupy G o wymiarze *h***

można pokazać, że

liczby n_a są dzielnikami rzędu grupy;

w szczególności (O3) daje:
(O3a1)

$$\sum_{g} n_a \mathrm{D}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{a}}(g) \mathrm{D}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{a}^*}(g) = h$$

można też pokazać, że zachodzi (dość oczywiste z O3)
(O3a)

$$\sum_{a} \sum_{ij} n_a \mathrm{D}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{a}^*}(g) \mathrm{D}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{a}}(g') = h \delta_{gg'}$$

jest tak ponieważ:
z tw.Burnside'a i z (o3) wynika, ze $(n_a/h)^{1/2} D_{ij}^{a}$ (g) dla ustalonego g tworzą składowe wektora, ale przebiegając po *g* też składowe wektora (transponowanego) – łącznie macierz kwadratową o wymiarze h;
(podobnie jak dla wektorów jednostkowych w R^3)

$$\begin{bmatrix} e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 \\ e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ e_3^1 & e_3^2 & e_3^3 \end{bmatrix}$$

macierz ta jest i ortogonalna i unitarna – ortogonalność wierszy pokazuje (O3) zatem musi zachodzić też ortogonalność kolumn – tzn. (O3a)

Tw.

zbiór charakterów $\chi(g)$ dla wszystkich g w zupełności charakteryzuje reprezentację nieprzywiedlną

jeśli w (O3) położymy i=j, k=l , zsumujemy po j,l to:
(O4) (sumowanie z prawej strony O3 dla n_a)

$$\sum_g \chi_a^*(g)\chi_b(g) = h\delta_{ab}$$

- **(O4) - pokazuje, że nierównoważne reprezentacje nie mogą mieć takich samych charakterów dla wszystkich *g* (bo wówczas suma z lewej byłaby sumą kwadratów, tzn. z definicji > 0)**

- **(O4) daje możliwość sprawdzenia jakie reps. nieredukowalne i ile, zawarte są w danej reprezentacji**

z (O4) mamy dla każdej reprezentacji <u>nieprzywiedlnej</u>
(O5)

$$\sum_g |\chi(g)|^2 = h$$

dla reprezentacji <u>redukowalnej</u> D , dla jej charakteru $\chi(g)$ oczywiście zachodzi:
(O6)

$$\chi(g) = \sum_a N_a \chi_a(g)$$

gdzie N_a - krotność reprezentacji nieredukowalnej a (D_a) w D

mnożąc (O6) przez $\chi_{a'}^*(g)$, sumując po *g* korzystając z (O4) mamy

(O6a)

$$N_a = \frac{1}{h}\sum_g \chi_a^*(g)\chi(g)$$

a to oznacza, że do wyznaczenia krotności danej rep. nrd. w rep. red. wystarczy znajomość ich charakterów

z powyższych wzorów (biorąc kwadrat modułu O6 , sumując po g i korzystając z O4) można pokazać, że

$$\sum_g |\chi(g)|^2 = h\sum_a N_a^2$$

ponieważ macierze reps. są unitarne, a unitarne transformacje nie zmieniają śladu macierzy zatem dla elementów należących do jednej klasy

$$g_1 = g_3 g_2 g_3^{-1}$$

zachodzi

$$D(g_1) = D(g_3)D(g_2)D^{-1}(g_3)$$

a to oznacza, że dla elementów w danej klasie wszystkie charaktery są takie same (gdyż macierze reprezentacji są unitarne**)**

- w powyższych wzorach wszelkie sumowania po *g* można zastąpić sumowaniem po klasach elementów w *G*, dopisując odpowiednio liczbę elementów w klasie h_r

np. bezpośrednio z (O4)
(O7)

$$\boxed{\sum_{r=1}^{N_r} h_r \chi_r^{a^*} \chi_r^b = h\delta_{ab}}$$

gdzie h_r - liczba elementów w klasie *r*, N_r - liczba klas.

jest to warunek ortogonalności charakterów
"między reprezentacjami nieredukowalnymi"

w szczególności dla a = b
(O8)

$$\sum_{r=1}^{N_r} h_r \left| \chi_r^a \right|^2 = h$$

co jest równoważne (O5);

z definicji charakteru

$$\chi_a(g) = \sum_{lk} \mathrm{D}^a_{lk}(g)\delta_{lk}$$

oraz z O3 i O3a można pokazać, że
(bez dowodu)

(O7a)

$$\boxed{\sum_a \chi_r^{a^*} \chi_p^a = \frac{h}{h_r}\delta_{rp}}$$

czyli warunek ortogonalności charakterów “między klasami”

w obydwu równaniach, (O7) i (O7a) , wielkości zdefiniowane jako

$$\chi'_{ra} = (h_r / h)^{1/2} \chi_r^a$$

można uważać za:

- ***r*-te składowe ortonormalnych wektorów χ_a' w przestrzeni klas (r) o wymiarze N_r ; ale liczba wektorów ortogonalnych równa liczbie reprezentacji N nie może być większa od wymiaru przestrzeni (N_r – bo tyle składowych-współrzędnych), zatem**

$$N \le N_r$$

- albo za a-te składowe wektorów χ_r' ortonormalnych w przestrzeni reprezentacji nieprzywiedlnych, to analogicznie

$$N_r \leq N$$

zatem ostatecznie
(O9)

$$N = N_r$$

- **Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych = liczbie klas**

poza tym pamiętamy, że

- **ich wymiary są dzielnikami rzędu grupy**

oraz

- **zawsze istnieje reprezentacja jednostkowa (χ = 1)**

a także

- **z (B)**

$$\boxed{\sum_{a=1}^{N} n_a^2 = h}$$

To wszystko razem
pozwala dla grup punkowych jednoznacznie wyznaczyć wymiary wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych,
a dodanie relacji ortogonalności (O7) i (O7a) jednoznacznie wyznacza same charaktery

Reprezentacje iloczynu prostego grup

jeśli $G = G_1 \times G_2$

$g \in G$, $g = g^{(1)}g^{(2)}$

jeśli funkcje φ_i^a stanowią bazę reprezentacji "a" grupy G_1 a funkcje φ_j^b są bazą pewnej rep. "b" grupy G_2 to jako bazę reprezentacji grupy G można wybrać iloczyny $f_{ij}^{ab} = \varphi_i^a \varphi_j^b$

wówczas elementy macierzy D $(g^{(1)}g^{(2)})$ tworzących reprezentacje grupy G są

$$D_{ij,kl}^{ab}(g^{(1)}g^{(2)}) = D_{ik}^{a}(g^{(1)})D_{jl}^{b}(g^{(2)})$$

(jest to pewna reprezentacja o nazwie „ab"; jeśli wymiar reprezentacji „a" grupy G_1 jest N_a i wymiar reprezentacji „b" grupy G_2 jest N_b, to wymiar reprezentacji „ab" jest N_a x N_b)

macierz D (g) - iloczyn prosty (Kroneckera) $D^{(1)}$ x $D^{(2)}$

(uwaga: to nie jest zwykły iloczyn macierzy!)

i analogicznie dla charakterów nieredukowalnych reprezentacji

$$\chi_{ab}(g) = \chi_a(g^{(1)})\chi_b(g^{(2)})$$

wymiar = iloczyn wymiarów;

jeśi "a" i "b" są nieprzywiedlne, to rep. "ab" też jest nieprzywiedlna

$$h_1 h_2 = h$$

mnożąc parami wszystkie reps nieprzywiedlne G_1 i G_2 otrzymamy wszystkie nieredukowalne reps G

Konstrukcja funkcji bazowych reprezentacji nieprzywiedlnych;

I. reprezentacja regularna:

weźmy dowolną funkcję $\phi_1(x)$

i podziałajmy na nią kolejno wszystkimi operacjami grupy,

e = g_1, g_2 , ... , g_h

otrzymamy *h* funkcji ϕ_i (x)

odpowiedni wybór ϕ_1 może doprowadzić do ϕ_i unormowanych i liniowo niezależnych

jest to *reprezentacja regularna*

działając *D(g)* ϕ_i $\rightarrow$ ϕ_j i $\neq$ j dla g $\neq$ e

to dla g $\neq$ e macierz nie ma elementów diagonalnych, zatem
(P1)

$$\chi(g) = \begin{cases} h & g = e \\ 0 & g \neq e \end{cases}$$

rep. regularna jest w ogólności przywiedlna;

korzystając z (O6a) i (P1) mamy (dla repr. regularnej)
(P1a)

$$N_a = \frac{1}{h}\sum_g \chi_a^*(g)\chi(g) = \frac{1}{h}\chi_a^*(e)\chi(e) = \chi_a^*(e) = n_a$$

tzn.
reprezentacja nieredukowalna "a" mieści się tyle razy w reprezentacji regularnej, ile wynosi jej wymiar

to daje w efekcie z powrotem tw. Burnside'a – gdyż reprezentacja regularna ma wymiar = h , a to oznacza, że:

reprezentacja regularna zawiera wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne

zatem z funkcji $\{\phi_i\}$ można wybrać funkcje budujące bazy wszystkich nieredukowalnych reprezentacji
(w tym wielu równoważnych)

wyznaczanie funkcji bazowych reprezentacji nieprzywiedlnych nie jest trywialne;

można pokazać, że operator
(P2)

$$B^a = \frac{n_a}{h} \sum_g \chi_a^*(g) D(g)$$

w działaniu na kolejne funkcje ϕ_i generuje h funkcji, spośród których $n_a^2 = n_a\, n_a$ - jest liniowo niezależnych i są one właśnie bazą nieredukowalnych reprezentacji "a" (i równoważnych) zawartych w rep. regularnej

żeby jednak je "wybrać" trzeba w ogólnym przypadku znać wszystkie macierze $D^a(g)$

Iloczyn prosty reprezentacji nieprzywiedlnych

(tej samej grupy)

niech f_i^a (i = 1,2,...n_a) oraz φ_k^b (k = 1,2,...n_b) tworzą bazy nieredukowalnych reprezentacji D_a i D_b grupy G

ich iloczyny

$$\psi_{ik} = f_i^a \varphi_k^b$$

tworzą bazę reprezentacji $D_{ab} = D_a D_b$
nazywanej iloczynem prostym reprezentacji

macierze reprezentacji D_{ab} są iloczynem prostym (Kroneckera) macierzy (z definicji ...)

$$D^{ab}_{ik,jl}(g) = D^{a}_{ij}(g) D^{b}_{kl}(g)$$

a charaktery są równe iloczynowi charakterów składowych

$$\chi_{ab}(g) = \chi_a(g)\chi_b(g)$$

iloczyn prosty reprezentacji nieprzywiedlnych
jest w ogólności reprezentacją przywiedlną.

Pojawia się problem rozkładu D_{ab} na reprezentacje nieprzywiedlne

jest to problem często występujący w zagadnieniach fizycznych, np. przy składaniu momentów pędu
- w ogólności gdy np. funkcje falowe układu buduje się jako iloczyny (lub kombinacje iloczynów) funkcji opisujących „podukłady" danego układu fizycznego

jeśli funkcje f_i^a i φ_k^b transformują się według tej samej reprezentacji to

$$\chi_{aa}(g) = (\chi_a(g))^2 .$$

Spośród n_a^2 funkcji (iloczynów) $f_i \varphi_k$ można utworzyć funkcje

zsymetryzowane

$$\psi^s_{ik} = f_i\varphi_k + f_k\varphi_i \qquad (i=1,2..,n_a; k=1,2,..,i)$$

i zantysymetryzowane

$$\psi^a_{ik} = f_i\varphi_k - f_k\varphi_i \qquad (i=1,2..,n_a; k=1,2,..,i-1)$$

funkcji zsymetyzowanych jest $\frac{1}{2} n_a(n_a + 1)$,

funkcji zantysymetyzowanych jest $\frac{1}{2} n_a(n_a - 1)$,

co w sumie daje całkowitą liczbę n_a^2

a zatem funkcje te transformują się niezależnie i tworzą bazy reprezentacji :

- **iloczynu zsymetryzowanego [D_a^2]**

i

- **iloczynu zantysymetryzowanego {D_a^2}**

ich macierze buduje się z macierzy D^a

$$\left[D_a^2\right]_{ik,jl} = \left(D_{ji}^a D_{lk}^a + D_{li}^a D_{jk}^a\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}\delta_{jl}\right)$$

$$\left\{D_a^2\right\}_{ik,jl} = \left(D_{ji}^a D_{lk}^a - D_{li}^a D_{jk}^a\right)$$

natomiast charaktery

$$\left[\chi_a^2(g)\right] = \tfrac{1}{2}\left[(\chi_a(g))^2 + \chi_a(g^2)\right]$$

$$\left\{\chi_a^2(g)\right\} = \tfrac{1}{2}\left[(\chi_a(g))^2 - \chi_a(g^2)\right]$$

<u>konkluzja:</u>

D_a x D_a - zawsze można rozłożyć na S i A

(one nie muszą być nieredukowalne)

Reprezentacje *<u>jednostkowe</u>* są zbudowane z funkcji będących niezmiennikami wszystkich operacji symetrii;

są jednowymiarowe i $\chi(g) = 1$, są nieredukowalne,

pytanie o reprezentacje jednostkowe zawarte w danej reprezentacji przywiedlnej jest interesujące fizycznie, bo dowiemy się ile jest różnych funkcji całkowicie niezmienniczych **(dla danego układu fizycznego)**
(uwaga o podprzestrzeniach dla zdegenerowanych wartości własnych H)

z (O6a) mamy: (P3)

$$N_0 = \tfrac{1}{h}\sum_g \chi(g)$$

(tyle razy zawarta jest reprezentacja jednostkowa w danej)

a z (P2) mamy, że dla reprezentacji regularnej, funkcję bazową (jedynej rep. jednostkowej w niej zawartej) znajdziemy jako

$$\psi^0 = \tfrac{1}{h}\sum_g D(g)\phi_1(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{h}\sum_i \phi_i(\mathbf{x})$$

gdyż wymiar rep. regularnej = *h*

iloczyn prosty zawiera rep. jednostkową wówczas gdy
(z P1a lub z P3 i z faktu, że χ=1 dla rep. jednostk.)

$$N_0 = \tfrac{1}{h}\sum_g \chi_a(g)\chi_b(g) \neq 0$$

ale z relacji ortogonalności mamy

$$\tfrac{1}{h}\sum_g \chi_a^*(g)\chi_b(g) = \delta_{ab}$$

a χ^* - można uważać za charakter rep. D* sprzężonej do D, z bazą funkcji sprzężonych,...

wynika z tego, że
reprezentacja jednostkowa zawarta jest jedynie w iloczynie prostym wzajemnie sprzężonych reprezentacji