## UKŁADY RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

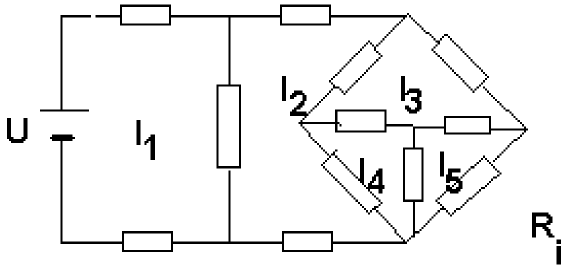
## (wyznacznik macierzy)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad (*)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

**przykład:**

**żaby znaleźć natężenia prądów w skomplikowanym układzie elektrycznym przy znanych opornościach i napięciu**




**bazując na prawach Kirchhoffa i Ohma układa się zespół liniowych równań algebraicznych na nieznane prądy $I_i$**

**Równanie (*) :**

**posługując się wzorami wyznacznikowymi Cramera**

**trzeba policzyć n+1 wyznaczników z macierzy**

**n x n i wykonać dodatkowo n dzieleń** $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

**oszacujmy ile mnożeń trzeba wykonać,**

**obliczając wyznacznik macierzy z definicji**

**rozwijając wzgl. i-tej kolumny:**

**n razy mnożymy przez wyznaczniki stopnia n-1**

**każdy wyznacznik stopnia n-1 :**

**n-1 razy mnożymy przez .....**

**...**

**$A_{11}$*[…] + $A_{21}$*[…] + … + $A_{n1}$*[…]**

tu jest n mnożeń + n x (mnożenia w minorach n-1) …

czyli

$$n + n(n-1+(n-1)(n-2+(n-2)(\ldots..+3(2)\ldots)$$

$$n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots.. + n! <\approx en!$$

**gdyż**

$$e = 1 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots. + \tfrac{1}{n!} + \ldots.$$

$$n!e = \underbrace{n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!}} + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} + \dots$$

**pozostałe wyrazy dają zaniedbywalny wkład**
**ale**

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

dla dużych n (tzw. wzór Sterlinga)
http://pl.wikipedia.org/wiki/Wz%C3%B3r_Stirlinga

**dla n=30**

**$n! \sim 10^{31}$ mnożeń**

**obecne komputery $\sim 10^9$ operacji zmiennoprzecinkowych / s**

**1 rok $\sim 3 * 10^7$ s , => w 1 roku $\sim 3 * 10^{16}$ mnożeń**

**ile to lat dla macierzy n=30 ?**

**$\sim 10^{14}$ lat.**

**konieczność użycia metod numerycznych**
**(które n.b. dają „numerycznie dokładny” wynik)**
**konieczność algorytmizacji**

## <u>Metoda eliminacji Gaussa</u>

**uogólnienie i zalgorytmizowanie ”szkolnej” metody podstawiania**

**algorytm:**

**1. dla i=1 , gdzie i - numer równania wykonujemy:**

- **mnożymy pierwsze równanie przez** $\frac{a_{j1}}{a_{11}}$

  **i odejmujemy od** $j$**-tego równania**

  **dla** $j=i, \ldots,$**n tzn. tu dla** $j=$**2,3,...,n**

**w ten sposób eliminujemy** $X_1$ **z równań** $j=$**2,3,...,n**

**otrzymujemy:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \ldots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

**gdzie**

$$a_{jk}^{(1)} = a_{jk} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1k}$$

indeks (1) oznacza (pierwszą) modyfikację elementu $\mathbf{a_{jk}}$

**2. powtarzamy to samo ale dla i=2 i tym razem dla wszystkich j=3,4,...,n**

**3. po n-1 krokach**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & .. & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \dots \\ b_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

**ten etap to <u>triangularyzacja</u> A**

**ogólnie wzory na zmodyfikowane elementy**

**(k – monitoruje, kolejny krok – nie jest realnym indeksem)**

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}$$

**k = 1,2,...,n-1**

**i = k+1,...,n**

**j = k+1,...,n+1**

**(tu przyjąłem** $b_k = a_{k,n+1}$ **)**

**musimy zapewnić, żeby** $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

- **$X_n$ - znajdujemy z ostatniego równania**

$$a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)}$$

- **$X_{n-1}$ z równania (n-1) i znajomości $X_n$**

$$a_{n-1,n-1}^{(n-2)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n = b_{n-1}^{(n-2)}$$

tzn. $$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \left( b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n \right)$$

- **znając $X_n$ , $X_{n-1}$ , ... ,$X_{i+1}$**

  **$X_i$ znajdziemy z i-tego równania jako:**

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left( b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j \right)$$

**ten etap to proces <u>podstawiania wstecz</u>**

**ilość mnożeń w obydwu etapach:**

**w k-tym kroku triangularyzacji wykonuje się**

n-k dzieleń oraz

(n-k)(n-k+1) mnożeń

**w sumie po n-1 krokach etapu I**

**dla dużych n**

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2) \approx \frac{n^3}{3}$$

**a liczba mnożeń w etapie II jest ~ 1/2 $n^2$**

**w sumie dla dużych n , liczba mnożeń ~ $n^3$ / 3**

**<u>dla n=30</u> => $n^3$ ~ $10^4$ ...**

**czas rozwiązania tego zagadnienia na typowym komput.**

**~ ułamek sekundy**

## „PIVOTING”

## (wybór elementu głównego)

**„naiwna” metoda eliminacji nie działa dla** $a_{kk} = 0$

**np.:**

$$\begin{array}{cccccc} 0x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

$a_{11}=0$

**sprawdźmy dla** $a_{11}$ **=** $\varepsilon$ **- bliskie zeru;**
**podstawianie wstecz prowadzi do:**

$$x_2 = \frac{2 - {}^1\!/_\varepsilon}{1 - {}^1\!/_\varepsilon} \qquad\qquad x_1 = \frac{1 - x_2}{\varepsilon}$$

**jeśli** $\varepsilon \approx 0$ **to numeryczna reprezentacja 1/ε**

**zdominuje 1.0 i 2.0**

**w rezultacie** $x_2 = 1$**,** $x_1 = 0$ **lub źle określone**

(dzielenie przez coś bardzo małego)

**a ścisłe rozwiązanie:** $x_2 = 1$ **,** $x_1 = 1$

**odwrócenie kolejności równań**

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \varepsilon x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$$

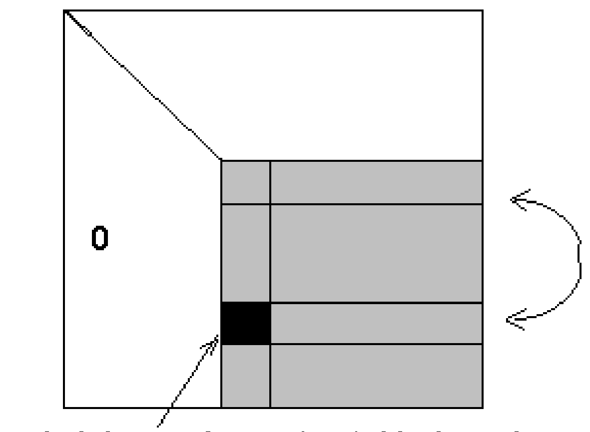
**prowadzi w procesie podstawiania wstecz do**

$$x_2 = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx 1 \qquad x_1 = 2 - x_2 \approx 1$$

**<u>tzw. częściowy wybór elementu głównego</u>:**

- **jako pierwsze równanie wybieramy to, które ma w pierwszej kolumnie największy element (*k*-te równanie)**

  **i mnożymy je przez** $\frac{a_{jk}}{a_{kk}}$ **dla pozostałych j;**
- **postępujemy tak w każdym kroku I-go etapu**




**<u>fragment (pseudo)-źródła:</u>**

```
for i:=1 to n     do  Index (i):=i;
for i:=1 to n-1  do
    begin
    i_max := szukaj_max ( A, i );  { indeksy  A  są:  A[ INDEX(j), i ]  }
    if A[ Index(i_max) , i ] = 0  then  -> brak rozwiązania  ;
    if  Index (i) <> Index (i_max)  then
        begin
        itemp := Index (i);
        Index (i) := Index (i_max);
```

```
      Index (i_max) := itemp;
      end;
   for j := i+1  to  n  do
      begin
      m := A[ Index(j) , i ] / A[ Index(i) , i ];
      for  k := j  to  n+1  do                    { B jako n+1-wsza kol. A }
          A[ Index(j), k ] := A[ Index(j), k ] -  m*A[ Index(i), k ];
      end;
    end;
if  A[ Index(n), n ] = 0  then  ->  brak rozwiązania ;
X[n] := A[Index(n), n+1 ] / A[Index(n), n ];
for  i := n-1  downto  1   do
   begin
   S := oblicz_sume ( A, X );
   X[ i ] := ( A[ Index(i), n+1) - S ) / A[ Index(i), i] ;
   end;
```

... program GAUSS_PI ...

## obliczanie wyzncznika macierzy A

1. operacja dodania wiersza (kolumny), pomnożonego przez liczbę, do innego wiersza (kolumny) nie zmienia wyznacznika macierzy

2. wyznacznik macierzy trójkątnej $$\det \mathbf{T} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{T}_{ii}$$

to etap triangularyzacji **A** prowadzi do det **A**

## odwracanie macierzy $A^{-1}$

$$\mathbf{A\,A^{-1} = I}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & .. & x_{1n} \\ .. & .. & .. \\ x_{n1} & .. & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. \\ 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$$

**formalnie jest to $n^2$ równań na $n^2$ niewiadomych $X_{ij}$ ,**

**zatem złożoność algorytmu rzędu $n^6$ ...**

**zamiast tego - n razy rozwiązujemy**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1k} \\ .. \\ x_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow na \quad k-tym$$

**ostatecznie ~ $n^4$ mnożeń**

**<u>Rozkład LU</u>**

$$\mathbf{A\,x = (L\,U)\,x = L\,(U\,x) = b}$$

$$\mathbf{L\,y = b}$$

$$\mathbf{U\,x = y}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ L_{21} & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ L_{n1} & L_{n2} & .. & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & .. & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & .. & U_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & U_{nn} \end{bmatrix}$$

**rozwiązanie każdego z tych równań to tylko etap II**

**znalezienie $\mathbf{L_{ij}}$ oraz $\mathbf{U_{ij}}$ z równań:**

$$\mathbf{U_{11} = A_{11}}$$

$$\mathbf{U_{12} = A_{12}}$$

$$\mathbf{L_{21}\, U_{11} + 1*0 = A_{21}}$$

**...**

**algorytm Crout'a na wyznaczanie $\mathbf{L_{ij}}$ i $\mathbf{U_{ij}}$**