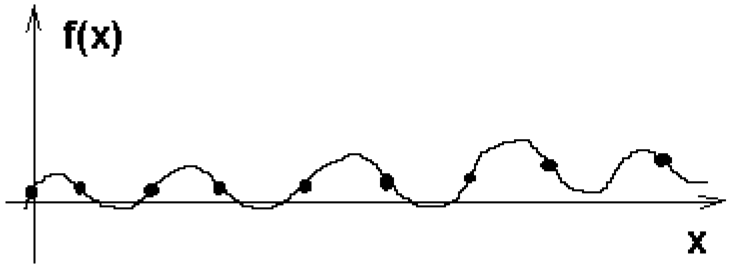
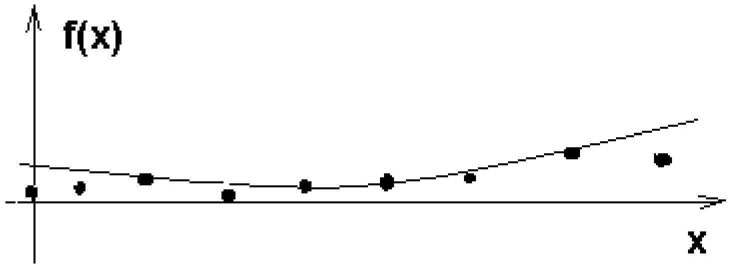
FUNKCJE SKLEJANE

- **duża ilość węzłów**

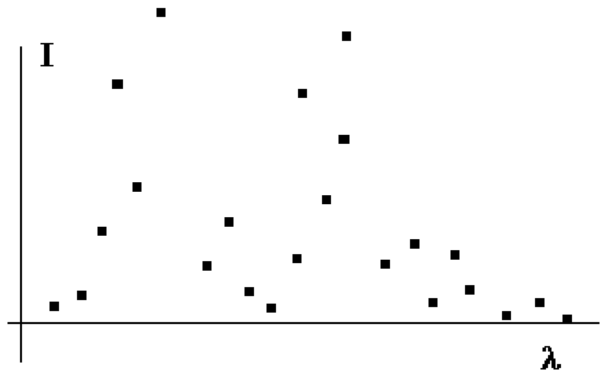


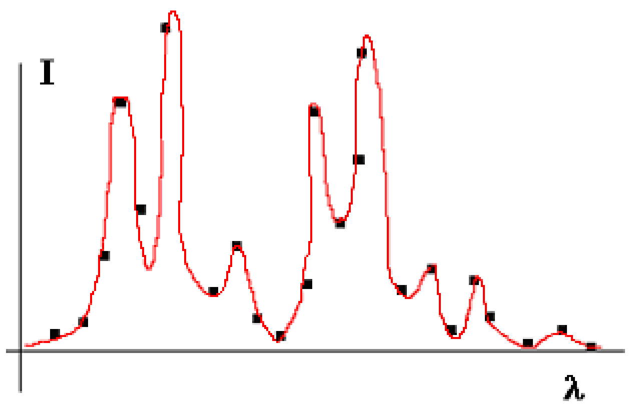
wielomian wysokiego stopnia



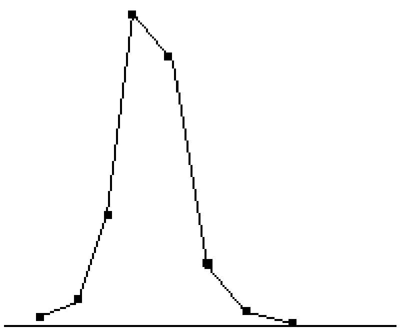
wielomian niskiego stopnia

- **żądamy funkcji gładko przechodzącej przez wszystkie punkty**





1. **sklejanie funkcjami liniowymi (nieróżniczkowalne)**



2.sklejanie funkcjami kwadratowymi (przedziałami)

- ax^2+bx+c -> dwie stałe z narzucenia wartości w x_i oraz x_{i+1}

trzecia stała z narzucenia ciągłości pochodnej w x_{i+1}, to

brak swobody w określaniu pochodnej na końcach przedziału

3. sklejanie funkcjami 3-go stopnia (*cubic spline*)

przedział $[a, b]$: $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$

a b

na każdym pod-przedziale

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i=0,1,\ldots,n-1$$

przybliżamy f(x) wielomianem 3-go stopnia S_i

(każdy taki wielomian jest określony przez 4 stałe)

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

żądamy:

a) $S_i(x_i)=f(x_i), \qquad i=0,1,...,n-1$

$S_{n-1}(x_n)=f(x_n)$

b) $S_{i+1}(x_{i+1})=S_i(x_{i+1}), \qquad i=0,1,...,n-2$ **ciągłość**

c) $S'_{i+1}(x_{i+1})=S'_i(x_{i+1}), \qquad i=0,1,...,n-2$ **różniczkowalność**

d) $S''_{i+1}(x_{i+1})=S''_i(x_{i+1}), \qquad i=0,1,...,n-2$

razem: 4n-2 równań

brakujące 2 równania:

- $S''_0(x_0)=0,$

  $S''_{n-1}(x_n)=0,$ ***naturalne*** **warunki brzegowe**

lub

- $S'_0(x_0)=y_0,$

  $S'_{n-1}(x_n)=y_n,$

w praktyce

postać $S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$

z warunku a) mamy:

$$a_i = f(x_i)$$

oznaczając

$$\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = h_i}$$

z warunku b) dostajemy

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \qquad (1)$$

oraz

$$a_{i+2} = a_{i+1} + b_{i+1} h_{i+1} + c_{i+1} h_{i+1}^2 + d_{i+1} h_{i+1}^3$$

z c) i d)

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \qquad (2)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \qquad (3)$$

oraz

$$c_{i+2} = c_{i+1} + 3d_{i+1} h_{i+1}$$

eliminując kolejno wszystkie d i b **oraz**

pamiętając, że

$$S^{//}_0(x_0)=0 \quad \Rightarrow \quad 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0)=0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0$$

i tak samo

$$0 = c_n = S^{//}_n(x_n) = S^{//}_{n-1}(x_n)$$

dostajemy układ równań na $\{ c_0, c_1, \ldots, c_n \}$

lub na $\{\, C_1, \; . \; . \; . \; , \; C_{n-1} \,\}$, **gdyż** C_0 i C_n **są zadane**

wiążący w każdym równaniu C_i , C_{i+1} , C_{i+2}

$$\begin{bmatrix} 2 & w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 2 & w_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 2 & w_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2} & 2 & w_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \\ \vdots \\ c_{n-2}^* \\ c_{n-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

gdzie
$$\begin{cases} u_{i+1} = \dfrac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \quad w_{i+1} = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \\ v_{i+1} = \left(\dfrac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h_{i+1}} - \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \right) : (h_i + h_{i+1}) \end{cases} \qquad i = 0,1,2,\ldots,n-2$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \qquad i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$f_i = f(x_i) \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

$$\mathbf{H\ c = a}$$

a to jest układ niejednorodnych liniowych równań algebraicznych...

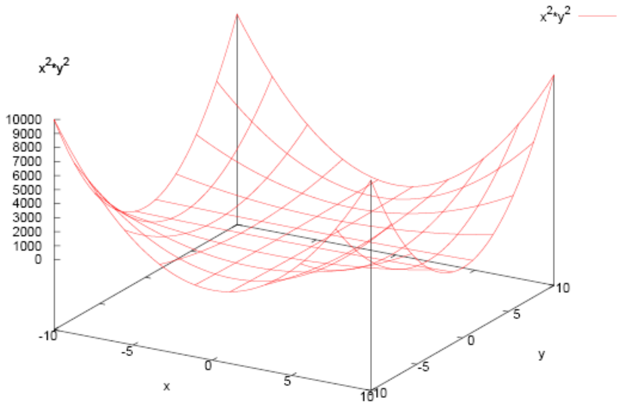
INTERPOLACJA W WIELU WYMIARACH

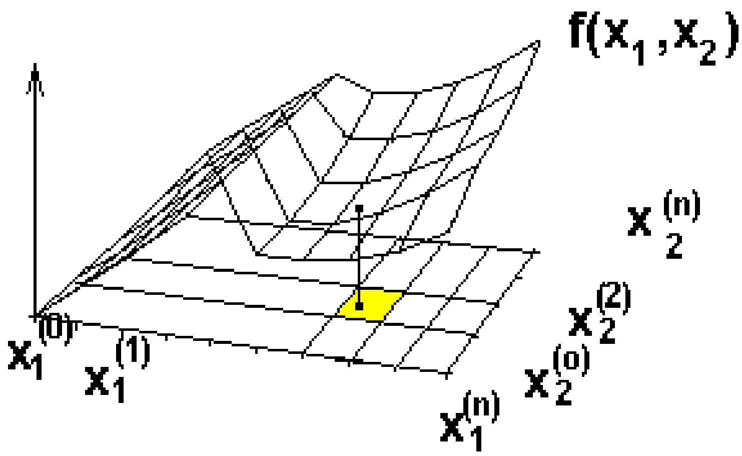
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

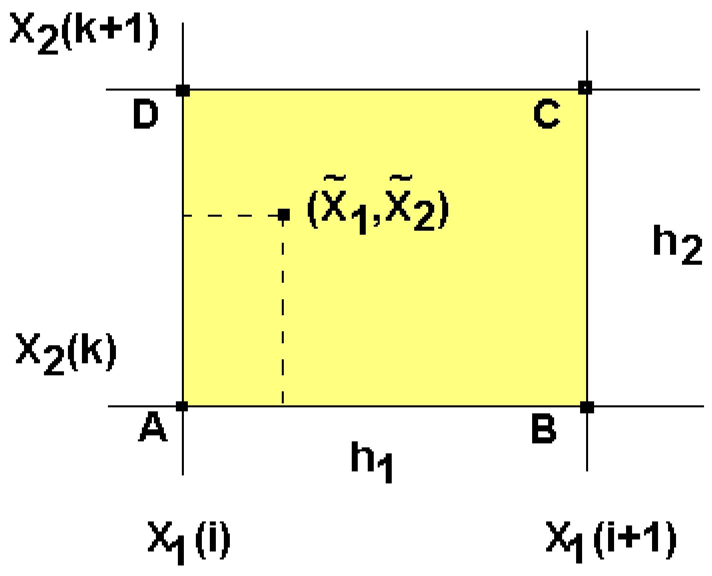
N **wektorów tablicujących siatkę punktów w każdym wymiarze**

$$x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n_1)}$$
$$x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(n_2)}$$
$$\ldots$$
$$x_N^{(0)}, x_N^{(1)}, \ldots, x_N^{(n_N)}$$

szukamy wartości $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N)$







stablicowane wartości funkcji w punktach A, B, C, D

oznaczmy y_1, y_2, y_3, y_4 (odpowiednio)

najprostsza: interpolacja formą *biliniową*

wprowadzając

$$t = (\tilde{x}_1 - x_1(i)) / h_1$$
$$u = (\tilde{x}_2 - x_2(k)) / h_2$$

w kier. x_1 , $y(x_1) = y_1 + (y_2 - y_1)t$, podobnie postąpimy w kier. x_2 ,

tzn. idąc z y_1 do y_4 oraz z y_2 do y_3 , tzn.,

$y_1 + (y_4 - y_1)u + (y_2 + (y_3 - y_2)u - y_1 - (y_4 - y_1)u)t$ daje:

$y_1 - y_1u - y_1t + y_4u - y_4ut + y_1ut + y_2t - y_2ut + y_3ut$

czyli

$$y(x_1,x_2) = (1-t)(1-u)y_1 + t(1-u)y_2 + tuy_3 + (1-t)uy_4$$

NUMERYCZNE CAŁKOWANIE

kwadratura

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Przybliżenie **(1)**

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f_i$$

przez **(2)**

gdzie $f_i = f(x_i)$, x_i, $i = 0,1,\ldots,n$

wstawmy do (1) wielomian interpolacyjny Lagrange'a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

$f(x_i)$ to stałe,

to C_i **w (2)**

$$C_i^{(n)} = \int_a^b L_i(x)dx = \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx \qquad \textbf{(3)}$$

(*dx = h dt* **)**

węzły równoodległe => kwadratury Newtona-Cotesa

przypomnijmy wzór na $L_k(x)$ dla węzłów równoodległych

$$L_i(x) = \frac{(-1)^{n-i}}{n!}\binom{n}{i}\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(t-j)$$

to [*dx = h dt*, gdyż *t = (x-x₀)/h* **]**

$$C_i^{(n)} = \frac{h}{n!}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\int_0^n \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n}(t-j)\,dt$$

<u>n=1 : formuła trapezów</u>

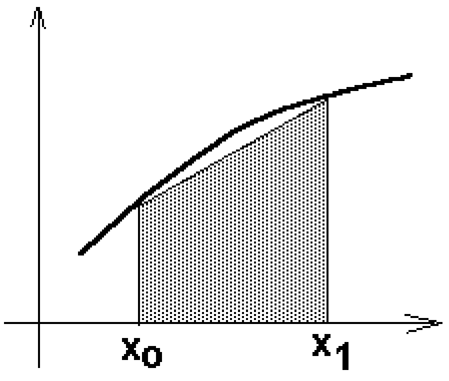
$a=x_0, \quad b=x_1$

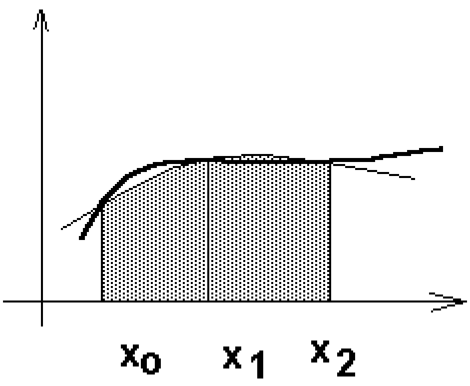
$$\boxed{\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_o + f_1)}$$

<u>n=2 : wzór Simpsona</u>

$a=x_0, \quad b=x_2, \quad x_1=(a+b)/2, \quad h=(b-a)/2$

$$\int_{x_o}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_o + 4f_1 + f_2)$$





błąd formuły trapezów **(ze wzoru na błąd)**

$$\int_{x_o}^{x_1} \frac{f^{//}(\xi)}{2!}(x - x_o)(x - x_1)dx = -\frac{h^3}{12}f^{//}(\xi)$$

błąd wzoru Simpsona

$$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

(!)

Zadanie:

sprawdź, że wzór Simpsona jest dokładny również dla wielomianu 3-go stopnia

ogólnie dla formuł zamkniętych:

n=2m

$$R = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2 (t-1)\dots(t-n)dt$$

n=2m+1

$$R = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\dots(t-n)dt$$

złożona formuła trapezów

jeśli siatka argumentów zbudowana jest z punktów równoodległych $X_0, X_2, \dots X_N$, **to stosując formułę trapezów dla każdego przedziału** (X_i, X_{i+1})

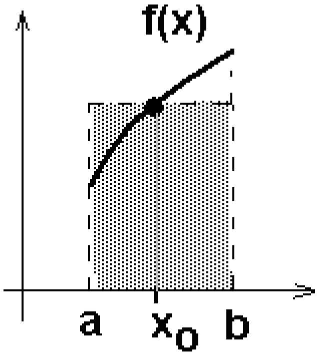
$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx = H\left[\frac{1}{2}(f_0 + f_N) + \sum_{k=1}^{N-1} f_k\right] + O\left(\frac{(x_N - x_0) f^{//}}{N^2}\right)$$

jeśli dla danego podziału odcinka $[a,b]=[x_1, x_N]$ **całka wynosi** $S^{(H)}$ **, to dla 2-krotnie "gęstszego" podziału z 2 razy mniejszym** $h=H/2$

$$\boxed{S^{(h)} = \frac{1}{2} S^{(H)} + h \cdot \sum_{n.p.p.} f_i}$$

formuły otwarte

gdy punkty początkowy lub / i końcowy elementarnego przedziału całkowania nie są węzłami wielomianu interpolacyjnego



np. wzór prostokątów

dla wielomianu interpolacyjnego 0-stopnia (stała = $f(x_o)$ **).**

obliczmy błąd przybliżenia prostokątnego ($h=b-a$ **)**

rozwińmy $f(x)$ **w szereg Taylora:**

$$f(x) = f(x_o) + f^{/}(x_o)(x - x_o) + 1/2\, f^{//}(\mu)(x - x_o)^2$$

po scałkowaniu pierwszy wyraz daje wartość całki przybliżoną wzorem prostokąta, drugi wyraz znika, a trzeci daje "resztę"

$$R = \frac{h^3}{24} f^{//}(\xi)$$