Metody wielokrokowe

1. związek pomiędzy rozwiązywaniem równań różniczkowych i całkowaniem

$$\frac{df}{dx} = g(x, f),$$

$$\int_t^{t+h} df = \int_t^{t+h} g(x, f(x))dx$$

$$f(t+h) = f(t) + \int_t^{t+h} g(x, f(x))dx$$

podcałkowe $g(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ **możemy przybliżyć**

wielomianem interpolacyjnym P **stopnia** ***m-1***

opartym o wcześniej znalezione przybliżenia w punktach

$$x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-(m-1)}$$

$$f_i, f_{i-1}, \ldots, f_{i-(m-1)}$$

$$f_{i+1} = f_i + \int_{t_i}^{t_i+h} P(t)dt$$

najbardziej odpowiedni jest

wielomian interpolacyjny Newtona ”w tył” (wsteczny)

$$P(x_i + h \cdot s) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k g_i$$

gdzie

$$\nabla g_i = g_i - g_{i-1}, \qquad \nabla^k g_i = \nabla^{k-1}(\nabla g_i)$$

$\nabla^k g(t_i, f(t_i))$ **są ”tylko” odpowiednimi różnicami skończonymi obliczonymi w ”poprzednich” punktach węzłowych (punktach siatki)**

ostatecznie

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t, f(t))dt \cong \sum_{k=0}^{m-1} \nabla^k g(t_i, f(t_i)) h (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$$

całki $(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$ **można łatwo policzyć**

i stabelaryzować <u>(raz na zawsze)</u> **dla różnych** k

K	0	1	2	3	...
całka	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	...

zatem

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g((t, f(t))dt \cong h\Big[g(t_i, f(t_i)) + \tfrac{1}{2}\nabla g(t_{i,} f(t_i)) +$$

$$+ \tfrac{5}{12}\nabla^2 g(t_{i,} f(t_i)) + \ldots\Big]$$

dla m = 3 ,

z definicji wstecznych różnic skończonych

$$\nabla g(t_{i,} f(t_i)) = g_i - g_{i-1}$$

$$\nabla^2 g(t_{i,} f(t_i)) = g_i - 2g_{i-1} + g_{i-2}$$

gdzie $$g_i = g(t_i, f_i) = g(t_i, f(t_i))$$

ostatecznie:

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{12}\left[23g(t_i, f_i) - 16g(t_{i-1}, f_{i-1}) + 5g(t_{i-2}, f_{i-2})\right]$$

<u>metoda Adamsa-Bashfortha 3-go rzędu</u>

wyznacza przybliżoną wartość rozwiązania *f* w punkcie i+1 w oparciu o wartości przybliżone *f* znalezione w 3 poprzednich punktach siatki (i, i-1, i-2)

<u>zalety:</u>

- **”łatwe” w obsłudze**
- **szybkie**

<u>wady</u>

- **nie mogą służyć do ”wystartowania” rozwiązania z punktu X_0**

<u>techniki z adaptowanym (zmiennym) krokiem:</u>

- z punktu t_i znajduje się rozwiązanie $f^{(1)}_{i+1}$ w punkcie $t_{i+1}=t_i + h$;
- z t_i , po 2 krokach $h/2$ znajduje się rozwiązanie $f^{(2)}_{i+1}$ w t_{i+1}
- jeśli $| f^{(2)}_{i+1} - f^{(1)}_{i+1} | > \varepsilon$ to krok h uważa się za niewystarczający, przyjmuje się $h = h/2$ i powtarza się procedurę