UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

N - ilość równań
K - maksymalny rząd pochodnej

1. N = 1, K = 1

$$\frac{d}{dx} F(x) = G(x, F)$$

2. N = 1, K = 2

$$\frac{d^2}{dx^2} F(x) = G(x, F, \frac{dF}{dx})$$

traktując $\frac{dF(x)}{dx} \equiv P(x)$ **jako niezależną funkcję**

$$\frac{dF}{dx} = G_1(x, F, P) \qquad G_1 \equiv P$$

$$\frac{dP}{dx} = G_2(x, F, P) \qquad G_2 \equiv G$$

układ 2 równań I rzędu

ogólnie

$$\frac{d^k}{dx^k}\mathbf{F}(x) = \mathbf{G}(x, \mathbf{F}, \mathbf{F}^{'}, \mathbf{F}^{''}, ..)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ .. \\ F_n(x) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1(x, F, F', ...) \\ G_2(x, F, F', ...) \\ ... \\ G_n(x, F, F', ...) \end{bmatrix}$$

można sprowadzić do układu n*k równań I rzędu

$$\frac{d}{dx}\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x, \mathbf{f}) \Big|_{i=1}^{N}$$

N = n*k stałych wyznacza jednoznacznie rozwiązanie

<u>**warunki początkowe (jednopunktowe wrunki brzegowe)**</u>

$$\left\{ f_i(x_0) = a_i \right\}_{i=1}^{N}$$

n = 1 ,   k = 1

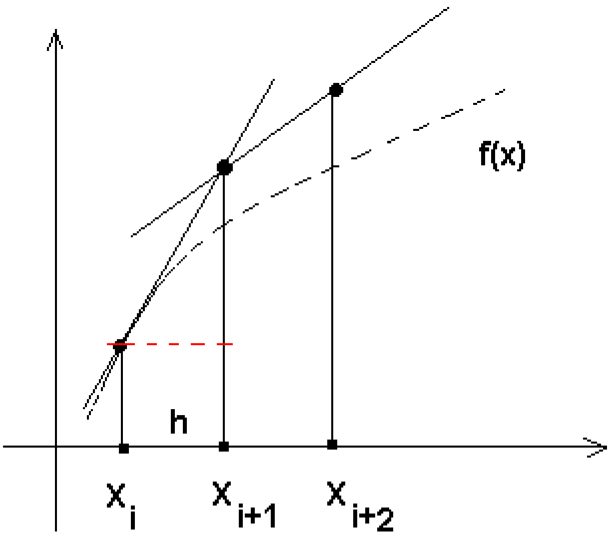
$$\frac{d}{dx} f(x) = g(x, f)$$

<u>metoda Eulera</u>

z **rozwinięcia** $\boldsymbol{f(x+h)}$ **w szereg Taylora (do n=1)**

$$f(x+h) = f(x) + hf^{/}(x) + \ldots$$

$$f(x+h) \approx f(x) + hg$$



$$f(x_o+h) = f(x_o) + h\, g(x_o, f(x_o))$$

...

$$f_{i+1} = f_i + h\, g(x_i, f_i)$$

wystarczy znać $f(x_o)=a_o$

błąd:

na każdym kroku $$f(x_i) - f_i = \frac{h^2}{2} f^{//}(\xi)$$

po n krokach na przedziale (a, b)

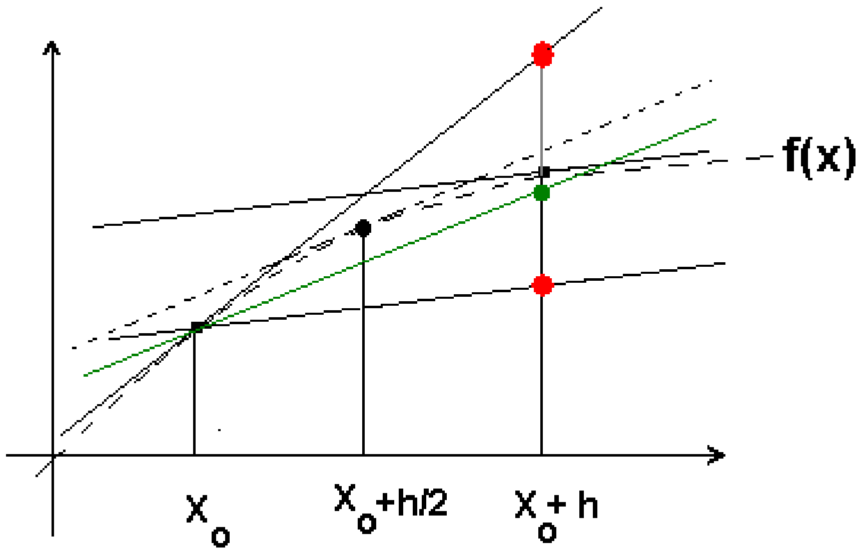
$$\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n} f^{//}(\xi_i) = n\frac{h^2}{2} f^{//}(\xi) = \frac{(b-a)h}{2} f^{//}(\xi)$$

akumulacja błędów

błąd popełniony w kroku i **wpływa na większy błąd w kroku** $i+1$

znoszenie błędów (gdy $f^{//}$ **okresowo zmienia znak)**

<u>zmodyfikowana metoda Eulera</u>



wyznaczając pochodną

(z wartości prawej strony równania)

w punkcie $\mathbf{X_0+h/2}$ **:**

$$f_{i+1} = f_i + h\, g(x_i+h/2,\, f_i(x_i+h/2))$$

a $f_i(x_i+h/2)$ **jako** $f_i+h/2\, g(x_i,f_i)$

dostajemy

$$f_{i+1}= f_i + hg(x_i+h/2,\ f_i+h/2g(x_i,f_i))$$

inaczej:

- **z krokiem h/2 wyznaczamy przybliżoną wartość f w punkcie X_i + h/2 „zwykłą" metodą**
- **mając f w tym punkcie wyznaczamy g(X_i+h/2)**
- **to g służy do wyznaczenia f w punkcie X_i+h startując z punktu X_i**

Błąd metody zmodyfikowanej ~ h^3 na kroku

<u>dowód</u>

1. rozwinięcie Taylora dla funkcji dwóch zmiennych

$$g(a+\Delta a, b+\Delta b) = g(a,b) + g_a(a,b)\Delta a + g_b(a,b)\Delta b + O^{(2)}$$

gdzie $g_a(a,b) = \dfrac{\partial g(a,b)}{\partial a}$ **a**

$O^{(2)}$ **zawiera wyrazy ~** $(\Delta a)^2, (\Delta a)^2, \Delta a \Delta b$

zatem dla

$$g(x_0 + \tfrac{h}{2}, f_0 + \tfrac{h}{2} g(x_0, f_0)) =$$
$$g(x_0, f_0) + \tfrac{h}{2} g_x(x_0, f_0) + \tfrac{h}{2} g(x_0, f_0) g_f(x_0, f_0)$$
$$+ ch^2$$

zatem przybliżona w tej metodzie wartość *f* w $x_0 = h$ (*)

$$f_1 = f_0 + hg(x_0, f_0) +$$

$$+ \frac{h^2}{2}\left[g_x(x_0, f_0) + g(x_0, f_0)g_f(x_0, f_0)\right] + ch^3$$

2. z drugiej strony, wartość ścisła (**)

$$f(x_1) = f(x_0) + hf^{/}(x_0) + \frac{h^2}{2} f^{//}(x_0) + c_1 h^3$$

gdzie w tym wzorze występują ścisłe pochodne *f*

ponieważ pochodne f wyznaczane są przez g

to $f^{/}(x_0)=g(x_0,f_0)$ **a**

$$f^{//}(x_0) = \left.\frac{df^{/}(x)}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dg(x, f(x))}{dx}\right|_{x_0} =$$

$$= g_x(x_0, f_0) + g_f(x_0, f_0)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

odejmując (*) i (**) otrzymujemy

$$f(x_1) - f_1 = Ch^3 .$$