1. Elementy (abstrakcyjnej) teorii grup

Grupy symetrii

def. Grupy

Zbiór (skończony lub nieskończony) elementów {g} tworzy grupę gdy:
- zdefiniowana operacja mnożenia (złożenia) $g_1g_2 = g_3 \in G$
- $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$
- istnieje tylko jeden element tożsamościowy e, $eg = ge = g$
- każdy g posiada element odwrotny g^{-1} , $gg^{-1} = e$

grupy abelowe: $g_1g_2 = g_2g_1$ lub inaczej $[g_1 , g_2] = 0$

przykłady podstawowe

- **zbiór [0,1] z dodawaniem zdef. jako**

  0+0->0
  0+1->1
  1+1->0

  tu e = 0 , 1 – jest odwrotnością dla siebie

- **zbiór [0,1] z mnożeniem – jako składaniem**
  nie jest grupą, gdyż nie istnieje element odwrotny do 0

- **grupa macierzy kwadratowych A o elementach rzeczywistych, rzędu *n* o det|A| ≠ 0, ze zwykłym mnożeniem macierzy**
  (nieskończona)

ilość elementów, m = *rząd grupy*

Własności grup

$g^n = ggg...g$ - n razy

dla grup skończonych, tworząc ciąg $e, g, g^2, g^3, \ldots, g^n, \ldots$

gdy pierwszym powtarzającym się elementem grupy będzie $e = g^m$
to grupę nazywamy *grupą cykliczną* (def.)

n – rząd grupy

Podzbiór G , będący grupą nazywa się *podgrupą*

Tw. (Lagrange'a)
Rząd podgrupy jest dzielnikiem rzędu grupy
rząd G / rząd H = indeks podgrupy

inaczej:
liczba elementów w grupie jest wielokrotnością
liczby elementów w podgrupie

zatem:

jeśli rząd grupy jest liczbą pierwszą to grupa nie ma podgrup
(za wyjątkiem podgrup *trywialnych*: e i G)

def.

g_1 i g_2 nazywają się sprzężonymi gdy istnieje taki $x \in G$, że

$$x g_1 x^{-1} = g_2$$

sprzężenie (relacja równoważności) jest:
a) zwrotne
b) przechodnie

elementy wzajemnie sprzężone tworzą rozłączne klasy

(sprzęgający element x może być różny dla różnych par elementów)

każdy element grupy może należeć tylko do jednej klasy

Izomorfizm

Dwie grupy G i H jednakowego rzędu są izomorficzne jeśli pomiędzy elementami tych grup istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie, takie, że

Jeśli g_1 <--> h_1 i g_2 <--> h_2 to g_1g_2 <--> h_1h_2

Elementowi e odpowiada e, g^{-1} odpowiada h^{-1}

<u>Homomorfizm</u>

Grupa G jest homomorficzna do grupy H gdy każdemu elementowi G przyporządkowany jest jednoznacznie element grupy H, ale jednemu elementowi z H może odpowiadać więcej niż jeden element z G

Homomorfizm nie jest zwrotny

<u>Przekształcenia symetrii</u>

(w 3D)

przekształcenia elementarne

- **obroty**
- **odbicia w płaszczyźnie**
- **translacje**

przekształcenia te tworzą grupy: grupy symetrii danych obiektów (atomów, molekuł, brył, ciał, kryształów,...)

pojęcie**:**
***zbiór punktów nieruchomych* – danego przekształcenia symetrii**

obroty i odbicia mogą posiadać punkty nieruchome – ale ich złożenia (iloczyny) nie muszą

ciała o skończonych rozmiarach mają zawsze jeden punkt nieruchomy (środek ciężkości);

ich grupy symetrii nie mogą zawierać translacji;

translacje dotyczą obiektów nieskończonych i periodycznych;

Przekształcenia symetrii (elementy grup symetrii) przeprowadzają obiekty w siebie (punkty obiektów w punkty równoważne lub w te same punkty)

obroty – przykład tworzenia grupy

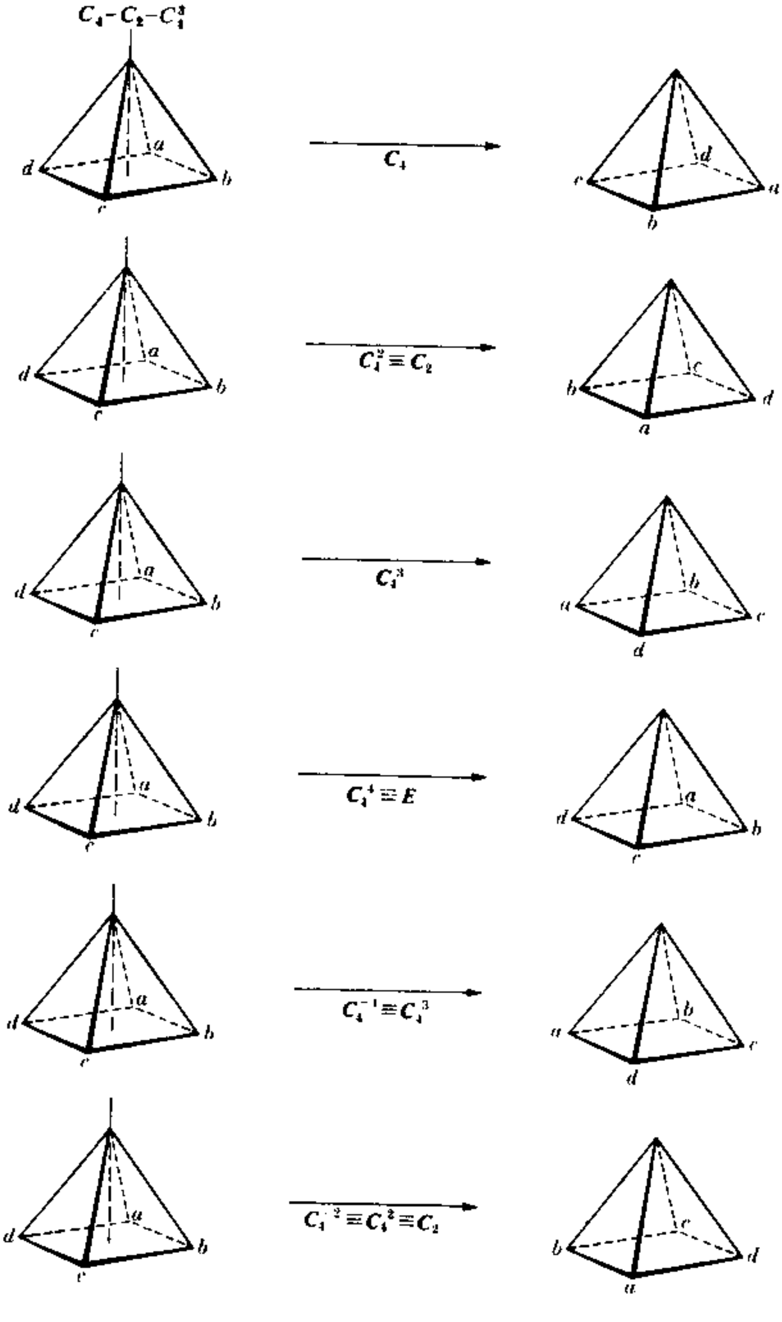


FIG. 2.3.1. Rotation.

odbicia – przykład

(drugi przykład to też odbicia trójkąta równobocznego na płaszczyźnie ale uwaga: same odbicia nie tworzą grupy)

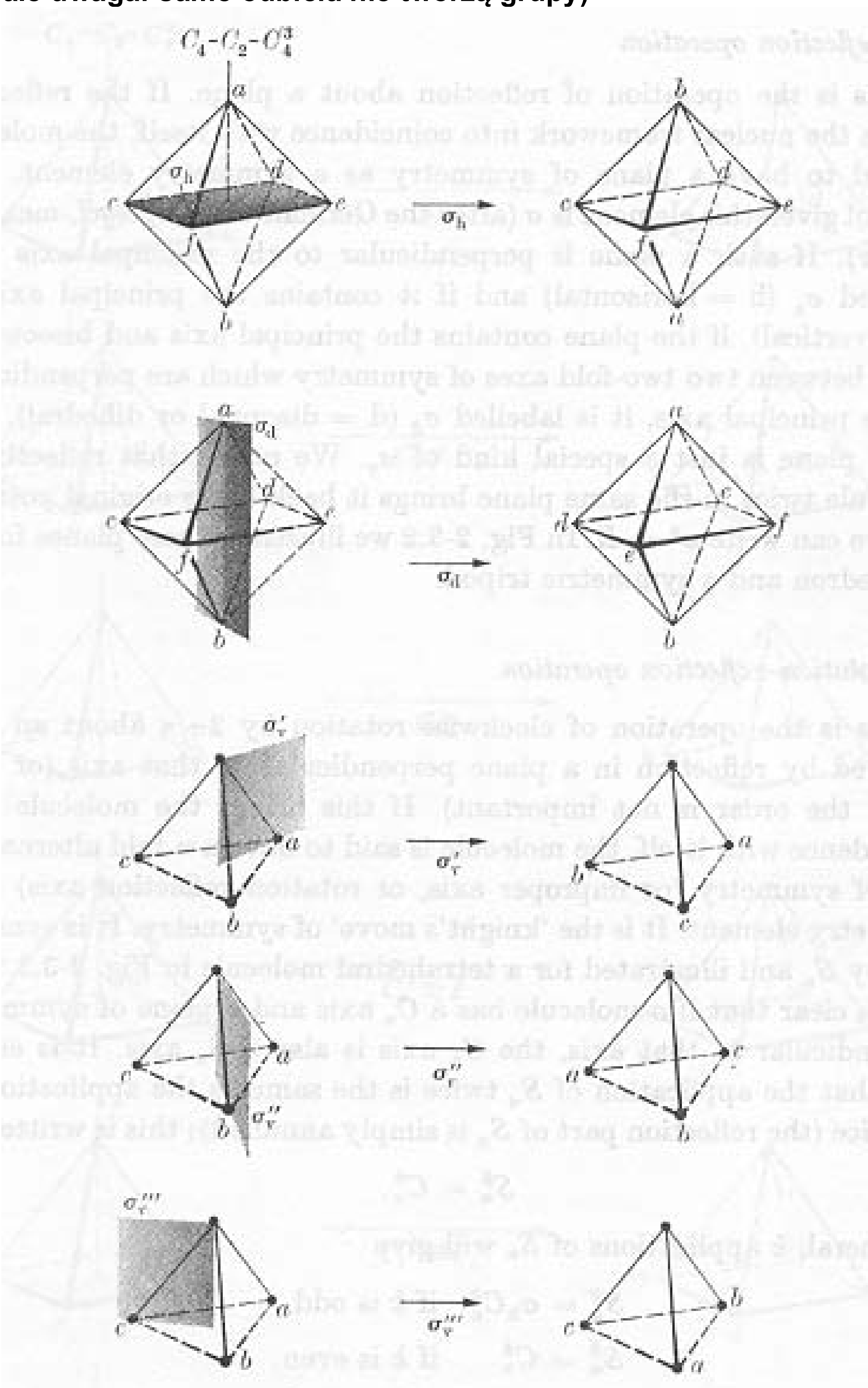


FIG. 2-3.2. Reflection.

<u>def.</u>

<u>Grupa punktowa</u>

grupa symetrii zachowująca punkt nieruchomy

w grupie punktowej, wszystkie osie obrotów i płaszczyzny symetrii przecinają się w jednym punkcie – w punkcie nieruchomym

niech α będzie kątem = $2\pi / n$

obrót o kąt α nazwijmy $c(\alpha)$ [lub $\mathbf{c_n}$]

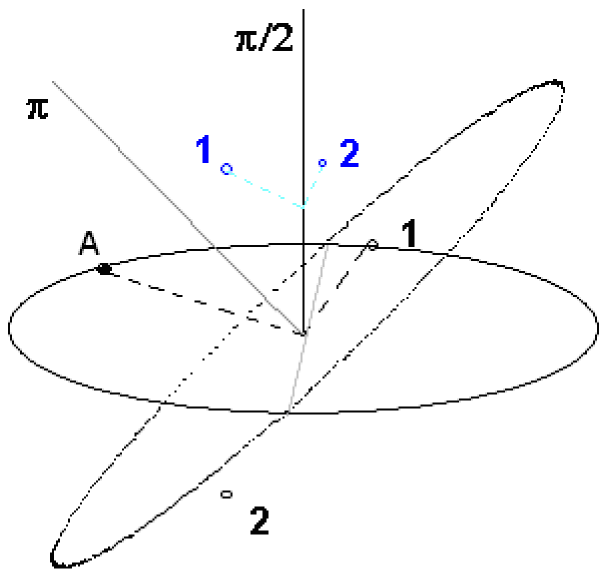
wykonanie n obrotów to $c^n(\alpha) = e$

zbiór obrotów o kąt α wokół zadanej osi tworzy grupę cykliczną C_n .

jeśli α nie jest współmierny z 2π , i obrót o α zachowuje symetrię to mamy dopuszczone obroty o dowolne kąty, grupa zawiera nieskończenie elementów i mówimy o *symetrii osiowej*

iloczyn obrotów wokół przecinających się osi też jest obrotem wokół pewnej osi

obroty (wokół różnych osi) na ogół nie są przemienne
(zaczynamy od **A**)

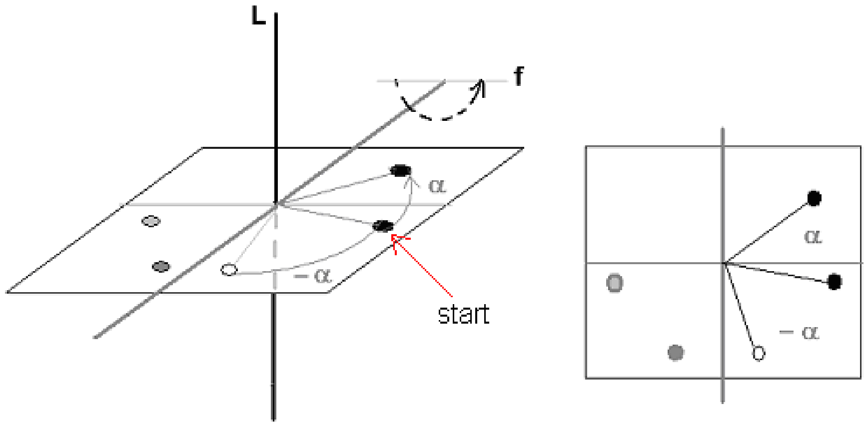


Tw.
jeśli $C_l(\alpha)$ jest obrotem o α wokół osi l, a f - oznacza dowolny obrót =>

$$f\,C_l(\alpha)\,f^{-1} \quad \text{jest obrotem o } \alpha \text{ wokół osi } fl$$

$f\,C_l(\alpha)\,f^{-1}$ - oznacza się jako $C_{fl}(\alpha)$

przykład szczególny



(*tu:obrót o (- α) to obrót wokół osi fl*)

Tw.
Jeśli dwie osie l i l' tworzą kąt α , to złożenie 2 obrotów o π wokół l i l' daje obrót o 2α wokół l'' prostopadłej do l i l'

Własności odbić

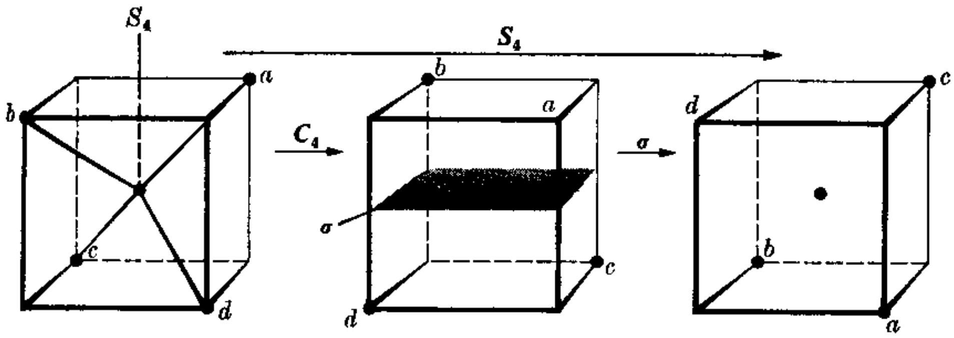
$$\sigma^2 = e$$

def
obrotem zwierciadlanym S_n nazywamy przekształcenie składające się z obrotu C_n i odbicia σ_h w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu

$$S_n = \sigma_h C_n = C_n \sigma_h$$

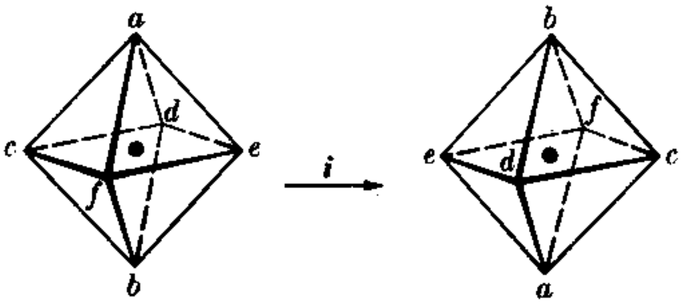
$$(S_n)^2 = (C_n)^2$$

$\sigma_h C_n = S_n$



to jest pewne nowe przekształcenie symetrii

<u>*Inwersja*</u> „i” - przypadek szczególny dla n=2

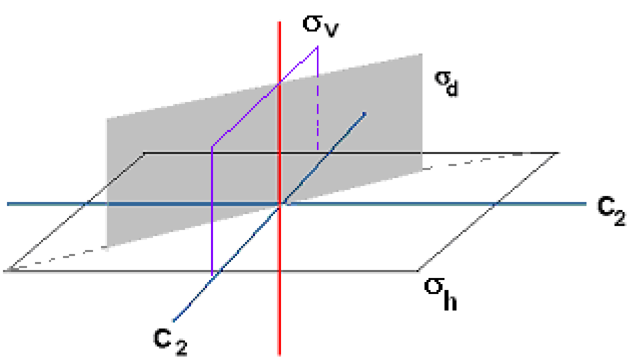


Przy inwersji, każdy wektor a przechodzi w $-a$

Inwersja jest przemienna ze wszystkimi obrotami i odbiciami

σ_v - odbicie w płaszczyźnie zawierającej oś obrotu

σ_d - odbicie w płaszczyźnie zawierającej oś obrotu, ale jednocześnie rozdzielającej (diagonalnie – *d*) dwie prostopadłe osie 2-krotne



Elementy grup obrotów – elementy I-go rodzaju (obroty właściwe)

Elementy grup zawierające odbicia - elementy II-go rodzaju

Każdy element, h, II-go rodzaju można przedstawić jako

$$h = i\,f = f\,i$$

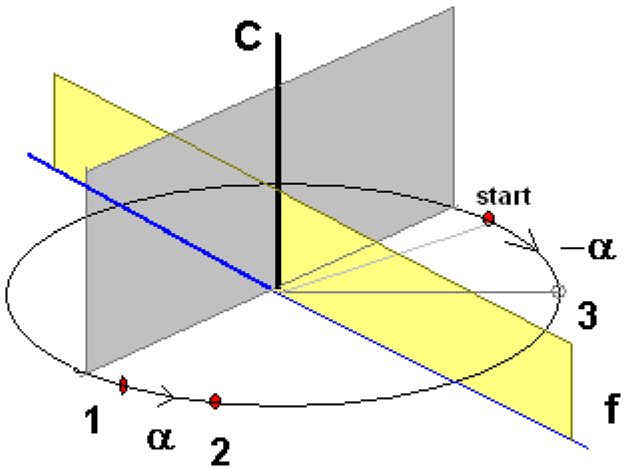
gdzie f - jest obrotem

(inwersja jest przemienna z wszystkimi operacjami)

Oś dwustronna: - obroty o α i $-\alpha$ są wzajemnie sprzężone,
[tzn. istnieje przekształcenie f, które $C(-\alpha) = f\,C(\alpha)\,f^{-1}$]

tym elementem f może być obrót o π wokół osi prostopadłej

lub płaszczyzna odbicia σ_V
(np. ta zdefiniowana na żółto na rysunku)



Iloczyn prosty grup

Jeśli $f \in H$ i $g \in G$, to pary elementów (f, g) tworzą nową grupę B z prawem mnożenia

$$(f_1, g_1)(f_2, g_2) = (f_1 f_2, g_1 g_2)$$

$$B = H \times G$$

Liczba elementów w B – iloczyn liczb elementów

Liczba klas w B – iloczyn liczb klas H i G

Jeśli część wspólna H i G to tylko e i dla każdych g,h zachodzi [h,g]=0 => B można uważać za grupę o elementach fg