Kwantowy efekt Halla

- Odkryty w 1980; Klaus von Klitzing (z G.Dorda, M.Pepper)
  Phys. Rev. Lett.45 (1980) 494

Klaus von Klitzing

- Nagroda Nobla – 1985

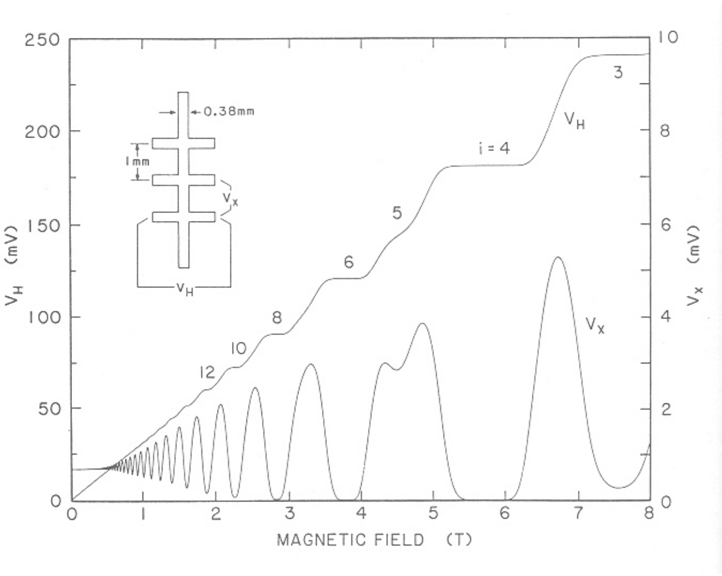
W pewnych specyficznych warunkach i w układach prawie idealnie 2-wymiarowych opór Halla ulega kwantowaniu

tzn. tensor przewodnictwa przyjmuje postać:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -ie^2/h \\ ie^2/h & 0 \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,....$$

Warunki:

1. **T~ 0 K**
2. **B – silne pola magnetyczne**
3. **kwazi-2D gaz elektronowy**



- **<u>zwykły efekt Halla</u>**

przepływem ładunku przez makroskopowy przewodnik rządzi prawo Ohma:

$$I = U / R$$

R – zależy od geometrii (L, S) i właściwości ρ_0 -oporność właściwa

Jeśli przyłożone jest jednorodne pole elektryczne

$$\vec{E} = (E, 0, 0)$$

$$\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho_0}\frac{U}{L} \qquad\qquad \sigma_0 = \frac{1}{\rho_0}$$

$$\vec{j} = \sigma_0 \cdot \vec{E}$$

(prawo Ohma w postaci różniczkowej)

- Półkwantowy obraz przewodnictwa

metal, pasmo przewodnictwa:

tylko elektrony obsadzające poziomy z pobliża E_F biorą udział w przewodnictwie; $V=V_F$;

ruch elektronu z V pomiędzy zderzeniami (defekty, domieszki, drgania sieci):

$$\vec{V}_{śr} = 0$$

Średnia droga swobodna: $l_0 = V_F\, \boldsymbol{\tau}$,

τ – czas między zderzeniami

W dodatkowym polu E , dodatkowa prędkość

$$\Delta V = -\frac{eE\tau}{m}$$

Jeśli n jest gęstością elektronów (ilość/obj.)

$$j = -en\Delta V = \frac{ne^2\tau}{m}E$$

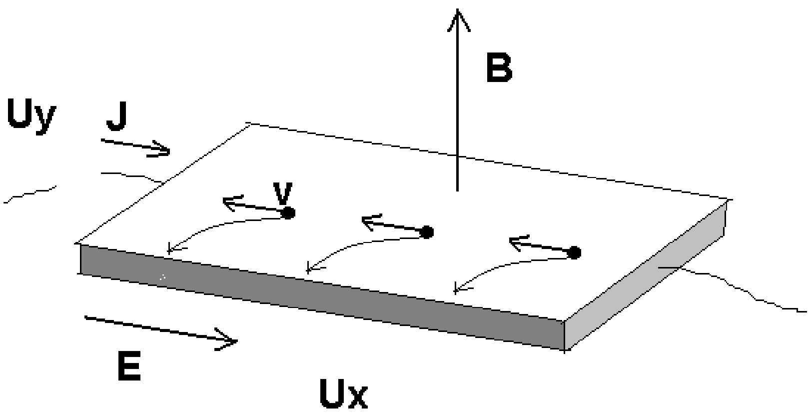
(*)

$$\sigma_0 = \frac{1}{\rho_0} = \frac{ne^2\tau}{m}$$

a ładunek przeniesiony w czasie $\boldsymbol{\tau}$ przez pow. S

$$-e\, n\, \boldsymbol{\tau} S\, \Delta V$$

płaski przewodnik w polu magnetycznym B $\perp$ płytki



σ i ρ sa teraz tensorami

$$\begin{bmatrix} j_x \\ j_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \end{bmatrix}$$

poprzeczne pole Halla

$$E_y = \frac{F}{e} = \frac{-e\vec{v} \times \vec{B}}{e} = \frac{1}{en} \vec{j} \times \vec{B}$$

to

$$\rho_{xy} = \frac{B}{en}$$

zatem

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_0 & B/en \\ -B/en & \rho_0 \end{bmatrix}$$

odwracając tę macierz, i pamiętając o związku $\boldsymbol{\rho_0}$ i τ (*)

oraz o związku B z ω - częstością cyklotronową (poprzez e i m) (**)

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 /(1+\omega^2\tau^2) \qquad \sigma_{xy} = \frac{en}{B} + \sigma_{xx}/(\omega\tau)$$

dla układów idealnych, w których prawie nie ma rozpraszania na domieszkach, τ jest bardzo duże i

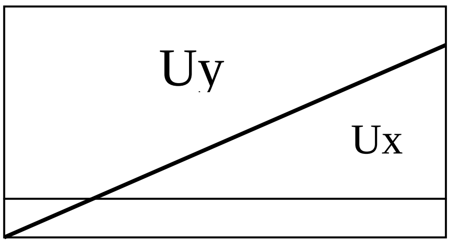
$$\sigma_{xy} = \frac{en}{B}$$

(**)

$$\omega = eB/m \qquad \sigma_0 = 1/\rho_0$$

klasyczna zależność $U_y = \rho_{xy} * I_x$, (napięcia Halla)

(ρ_{xy} - oporność Halla)

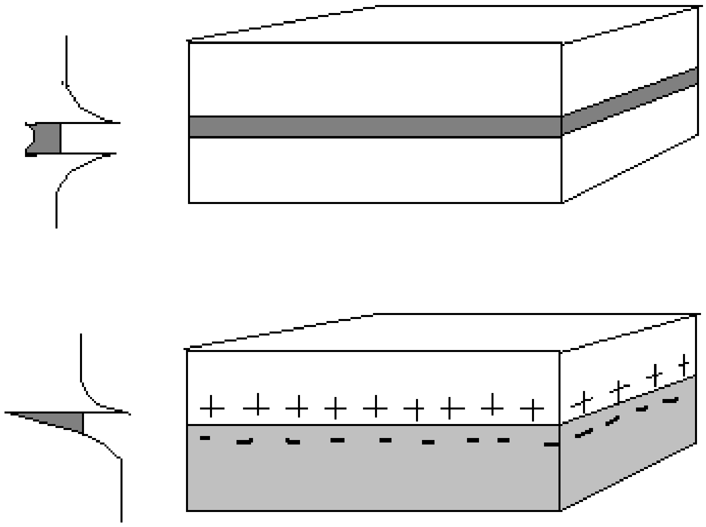


Uwaga: warto tu już jednak zauważyć, że przy odwracaniu tensora ρ dostaniemy

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xy}^2 + \rho_{xx}^2}$$

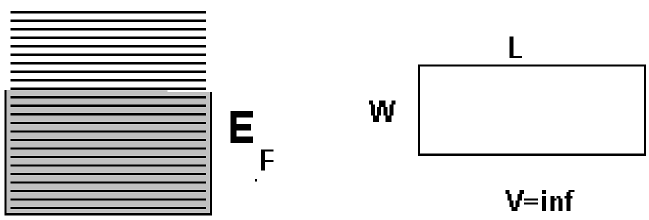
co implikuje, że gdy $\sigma_{xx} = 0$ to i $\rho_{xx} = 0$

2D gaz elektronowy



Teoria QHE

1. stany energetyczne w 2-wymiarowym gazie prawie swobodnych elektronów



2. swobodny elektron w jednorodnym polu magnetycznym B

$\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$

Hamiltonian (bez spinu)

$$\frac{1}{2m}\left[(\vec{p}-e\vec{A})^2 - E\right]\Psi_s(\vec{r}) = 0$$

A - potencjał wektorowy, poprzez który opisuje się
pole magnetyczne

$$\vec{B} = rot \quad \vec{A}$$

A - określony z dokładnością do gradientu dowolnej
funkcji skalarnej
$F(r)$; $A^{/} = A + \nabla F$ ($rot\ \nabla F(r) = 0$)

przy cechowaniu Landau'a

$$\vec{A} = (-yB,0,0)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{eB}{\hbar}y\right)^2 - \frac{d^2}{dy^2} - E\right\}\Psi(\vec{r}) = 0$$

separacja zmiennych x, y; dla L>>W elektrony prawie
swobodne w kier x, zatem:

$$\Psi = \Phi(y)e^{ikx}$$

i kładąc $l^2 = \hbar / eB$ dostaniemy:

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left\{\left(\frac{y}{l} - lk\right)^2 - l^2\frac{d^2}{dy^2} - E\right\}\Phi(y) = 0$$

!!! równanie przesuniętego oscylatora harmonicznego !!!
(przesuniętego o l^2k)

<u>Uwaga</u>: przy cechowaniu symetrycznym dostalibyśmy ruch
harmoniczny „kołowy”, ale 1D-OH jest tym samym – tylko inny
wybór układu odniesienia

funkcje Φ :

$$\Phi_{nk} = H_n(y/l - lk)\exp(-(y - l^2k)^2/2l^2)$$

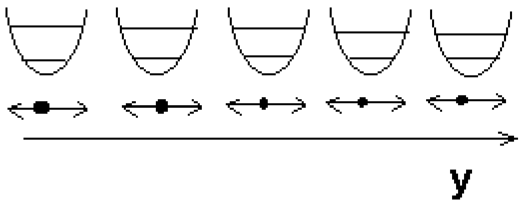
zależą od k , ale
energie (**poziomy Landau'a**):

$$E_{nk} = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})$$

<u>**nie zależą od k**</u>

=> **silna degeneracja**

- nie ograniczając układu (W, L -> inf.)
  pole magnetyczne ogranicza ruch każdego elektronu w kier. Y, (przy tym cechowaniu)



Każdy poziom Landau'a jest wielokrotnie zdegenerowany (*k*)

- dla płytki o rozmiarach L x W mamy:

0<y< W => max. y = W

ale

max. y = l^2 k => 0<k<W/ l^2

dla dużych, lecz skończonych L
k - przyjmuje dyskretne wartości:

$$k = \frac{2\pi i}{L}\,,$$ *i* – liczba naturalna,

zatem krotność degeneracji każdego poziomu Landau'a wynosi:

$$N = \frac{LW}{2l^2\pi}$$

(N – to największe możliwe i)

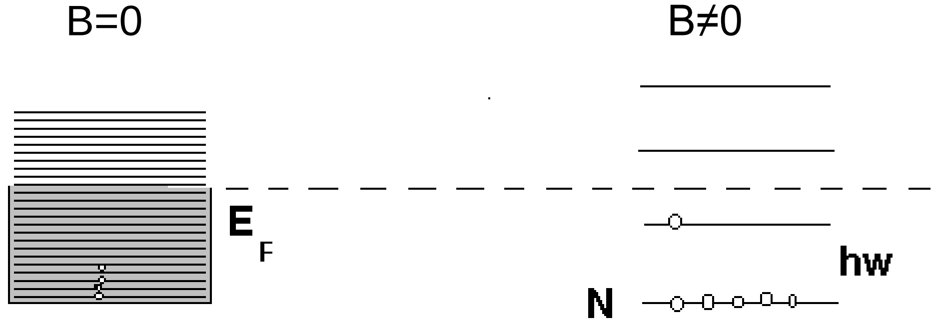
pamiętając, że $l^2 = \hbar / eB$

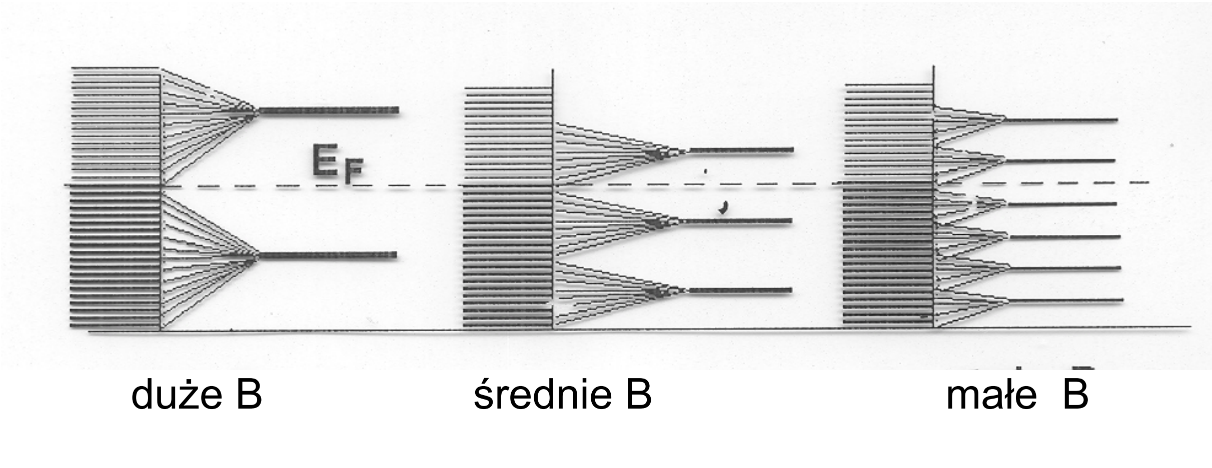
to **gęstość stanów** (ilość na jedn. powierzchni LW)

dla jednego poziomu Landau'a:

$$n_B = N/(LW) = 1/(2l^2\pi) = \frac{eB}{h}$$

n – będzie składało się z tylu porcji n_B ile jest poziomów Landaua poniżej E_F (ostatni nie koniecznie całk. obsadzony)



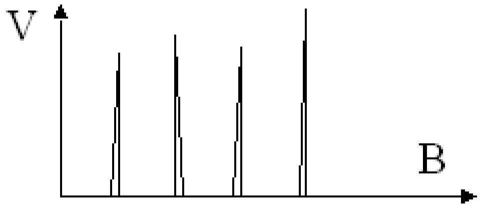


duże B średnie B małe B

Uwaga: B nie zmienia położenia poziomu Fermiego;
(poziom Fermiego jest określony poprzez zewnętrzne metaliczne kontakty),
ale:
B zmienia położenie poziomów Landaua wzg. E_F

Zatem:

- gdy E_F pomiędzy poziomami Landaua to nie może zachodzić rozpraszanie elektronów (brak blisko leżących poziomów), a zatem τ_0 staje się bliski nieskończoności i $\boldsymbol{\rho_{xx}}$ znika [znika też $\boldsymbol{\sigma_{xx}}$] - (nadprzewodnictwo!)
- gdy B zmienia się i kolejny poziom Landaua „przechodzi" przez E_F - prawie normalne przewodnictwo



Co z σ_{xy} ?

Niech $\boldsymbol{i}$ - czynnik wypełnienia (określa ile poziomów Landaua jest całkowicie wypełnionych)

$$i = \frac{n}{n_B}$$

ale

$$i = \frac{B\sigma_{xy}/e}{eB/h} \quad => \quad \sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} i \quad => \quad \rho_{xy} = \frac{h}{ie^2}$$

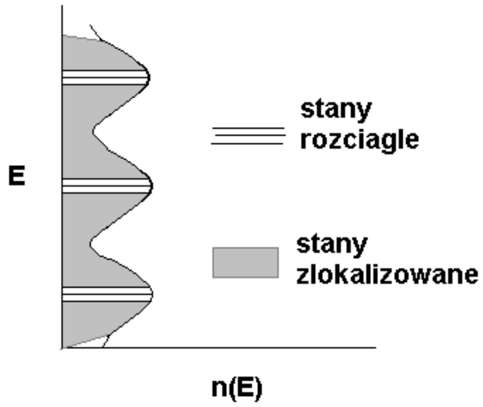
w rzeczywistości,
„schodki" $\boldsymbol{\rho_{xy}}$ są rozmyte, a $\boldsymbol{\rho_{xx}}$ nie dokładnie $\boldsymbol{\delta}$

poza tym ρ_{xy} byłoby stałe tylko wówczas gdyby poziomy Landau’a (poniżej E_F) były dokładnie zapełnione, a przecież poziom Landau’a poniżej E_F zapełnia się w miarę obniżania B, gdyż wówczas maleje n_B ...
a jednak obserwujemy „stałe” ρ_{xy} w szerokich obszarach „plateau”

wynika to z roli zawsze obecnych zlokalizowanych stanów resztkowych niejednorodności sieci i domieszek...

te zaburzenia tylko nieznacznie poszerzają „idealne” poziomy Landaua (PL) do „stanów rozciągłych” – dzięki czemu płynie prąd gdy PL przechodzi przez E_F ,

w utrzymaniu stałości ρ_{xy} , w miarę zmian B (obszar plateau) rolę odgrywa zapełnianie i opróżnianie poziomów zlokalizowanych (o energiach ~ E_F)



- rola stanów „brzegowych” (*edge states*); rola domieszek