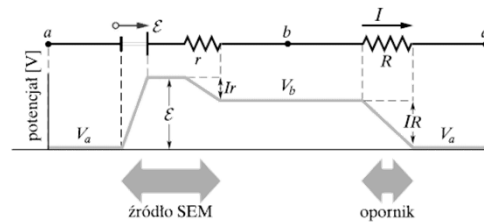


II prawo Kirchhoffa

- ✓ algebraiczna suma zmian potencjału napotykanego przy pełnym obejściu dowolnego oczka jest równa zero

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0$$



Obwód RC

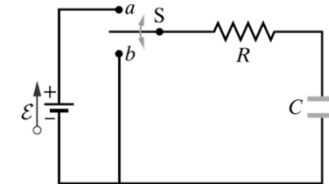
- ✓ klucz zwarty w punkcie a - ładowanie kondensatora
- ✓ II prawo Kirchhoffa

$$\mathcal{E} - IR - U_C = 0$$

$$U_C = \frac{q}{C}, \quad I = \frac{dq}{dt}$$

- ✓ równanie ładowania

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$



Obwód RC

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

$$w = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{RC} \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} w$$

$$\frac{dw}{w} = -\frac{1}{RC} dt$$

Obwód RC

$$\int_{w(0)}^{w(t)} \frac{dw}{w} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln|w(t)| - \ln|w(0)| = -\frac{1}{RC}(t - 0)$$

$$\ln \left| \frac{w(t)}{w(0)} \right| = -\frac{1}{RC} t$$

$$w(t) = w(0) e^{-\frac{1}{RC} t}$$

Obwód RC

$$\frac{\varepsilon}{R} - \frac{q(t)}{RC} = \left[\frac{\varepsilon}{R} - \frac{q(0)}{RC} \right] e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$q(t) = RC \left\{ \frac{\varepsilon}{R} - \left[\frac{\varepsilon}{R} - \frac{q(0)}{RC} \right] e^{-\frac{1}{RC}t} \right\}$$

- ✓ warunek brzegowy $q(0) = 0$
- ✓ rozwiązanie

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

Obwód RC

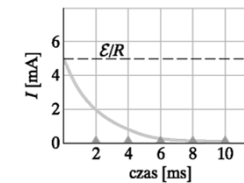
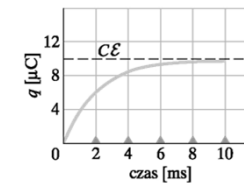
- ✓ ładunek a natężenie prądu

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

- ✓ pojemnościowa stała czasowa

$$\tau_C = RC$$



Obwód RC

- ✓ klucz zwarty w punkcie b - rozładowywanie kondensatora
- ✓ równanie rozładowywania

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

- ✓ rozwiązanie

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Obwód RL

- ✓ indukcyjność L solenoidu o n zwojach na jednostkę długości, polu przekroju S i długości l

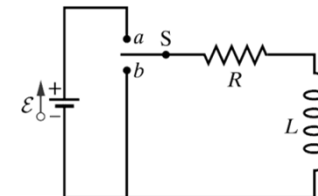
$$L = \mu_0 n^2 S l$$

$$[L] = \text{H}$$

- ✓ SEM samoindukcji

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

- ✓ przepływ prądu zmiennego przez solenoid - początkowe przeciwdziałanie wzrostowi natężenia prądu (reguła Lenza), następnie zachowanie się jak zwykłego przewodu



Obwód RL

- ✓ klucz zwarty w punkcie a
- ✓ II prawo Kirchhoffa

$$\varepsilon - IR + \varepsilon_L = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon$$

- ✓ rozwiązanie

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Obwód RL

- ✓ indukcyjna stała czasowa

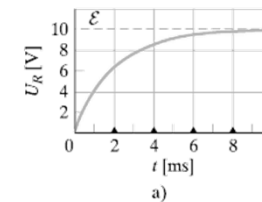
$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

- ✓ przypadki graniczne

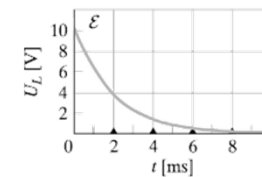
$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} I(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{\varepsilon}{R}$$



a)



Obwód RL

- ✓ klucz zwarty w punkcie b
- ✓ II prawo Kirchhoffa

$$-IR + \varepsilon_L = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0$$

- ✓ rozwiązanie

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Energia zmagazynowana w polu

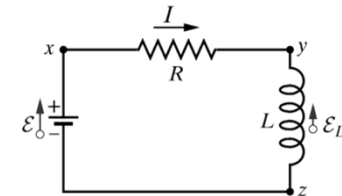
- ✓ pole elektrostatyczne – energia w kondensatorze

$$E_{el} = \frac{q^2}{2C}$$

- ✓ pole magnetyczne – energia w solenoidzie

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon \quad / \cdot I$$

$$LI \frac{dI}{dt} + I^2 R = I \varepsilon$$



Energia zmagazynowana w polu

$$LI \frac{dI}{dt} = \frac{dE_{\text{magn}}}{dt}$$

$$dE_{\text{magn}} = LI dI$$

$$\int_0^{E_{\text{magn}}} dE_{\text{magn}} = \int_0^I LI dI$$

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} LI^2$$

Obwód LC

- ✓ najprostszy obwód drgający
- ✓ drgania pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego w solenoidzie

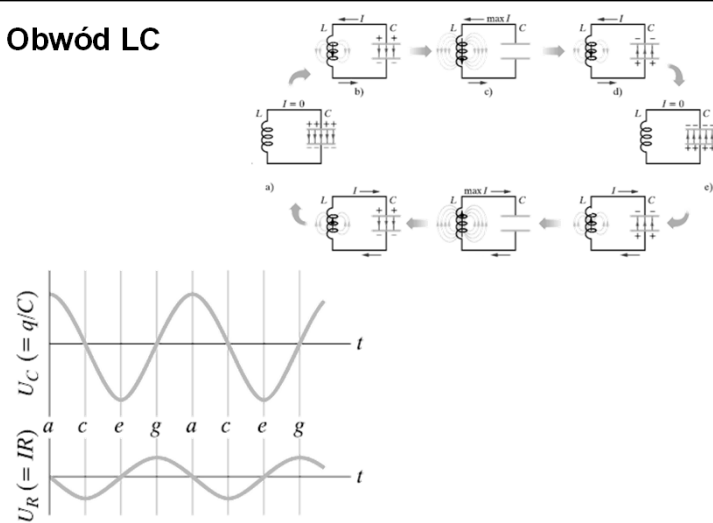
$$E_{\text{el}} = \frac{q^2}{2C}$$

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} LI^2$$

$$E = E_{\text{el}} + E_{\text{magn}}$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{C} + LI^2 \right)$$

Obwód LC



Obwód LC

- ✓ brak oporu – brak strat energii całkowitej

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{C} + LI^2 \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{C} + LI^2 \right) = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0$$

Obwód LC

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L \frac{dq}{dt} \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

✓ równanie drgań w obwodzie LC

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

Drgania mechaniczne a elektromagnetyczne

$E_p = \frac{1}{2} kx^2$	$E_{el} = \frac{q^2}{2C}$
$E_k = \frac{1}{2} mv^2$	$E_{magn} = \frac{1}{2} LI^2$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$x \rightarrow q$
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	$v \rightarrow I \quad (\dot{x} \rightarrow \dot{q})$
$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$	$k \rightarrow \frac{1}{C}$
$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$	$m \rightarrow L$

Drgania mechaniczne a elektromagnetyczne

$E_p = \frac{1}{2} kx^2$	$E_{el} = \frac{q^2}{2C}$
$E_k = \frac{1}{2} mv^2$	$E_{magn} = \frac{1}{2} LI^2$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$
$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$	$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$
$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$	$I(t) = -\omega q_m \sin(\omega t + \varphi)$

Obwód LC

✓ wzór Thomsona (Kelvina)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

✓ zmiany energii w funkcji czasu

$$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_{el}(t) = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = -\omega q_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_{magn}(t) = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 q_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{magn}(t) = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Obwód LC

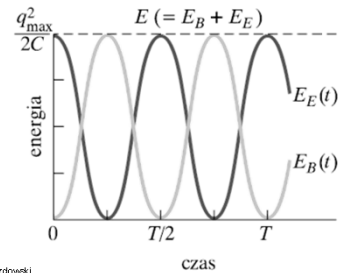
$$E_{el}(t) = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{magn}(t) = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = E_{el} + E_{magn}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$E = \frac{q_m^2}{2C} = \text{const.}$$



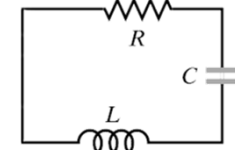
Obwód RLC

- ✓ drgania pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego w solenoidzie
- ✓ obecność oporu - tłumienie drgań
- ✓ straty energii w postaci ciepła wydzielanego na oporniku

$$\frac{dE}{dt} = -I^2 R$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{C} + LI^2 \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt}$$



Obwód RLC

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L \frac{dq}{dt} \frac{d^2 q}{dt^2} = -R \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$$

- ✓ równanie drgań w obwodzie RLC

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

Obwód RLC

- ✓ rozwiązanie

$$q = q_m e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \varphi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

- ✓ przypadek niewielkiego oporu

$$\omega' \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega$$

Obwód RC „w pigułce”

- ✓ ładowanie kondensatora (a)

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

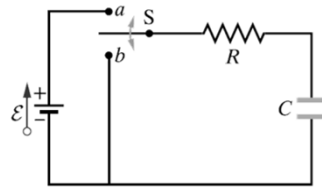
$$q(t) = C\varepsilon \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \right]$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$$

- ✓ rozładowywanie kondensatora (b)

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right), \quad I(t) = -\frac{q_0}{RC} \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$$



Obwód RL „w pigułce”

- ✓ zasilanie włączone (a)

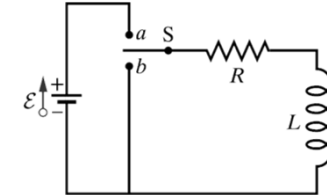
$$L\dot{I} + RI = \varepsilon$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right]$$

- ✓ zasilanie wyłączone (b)

$$L\dot{I} + RI = 0$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$



Obwód LC „w pigułce”

- ✓ równanie drgań z rozwiązaniem

$$\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = -\omega q_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- ✓ brak strat energii

$$E_{el}(t) = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{magn}(t) = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = \frac{q_m^2}{2C} = \text{const.}$$

Obwód RLC „w pigułce”

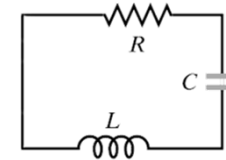
- ✓ równanie drgań z rozwiązaniem

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$q = q_m e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \varphi)$$

- ✓ występowanie strat energii

$$E_{el}(t) = \frac{q_m^2}{2C} e^{-\frac{R}{L}t} \cos^2(\omega' t + \varphi)$$



Źródło zmiennej SEM przy obciążeniu oporowym

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega_w t)$$

- ✓ II prawo Kirchhoffa

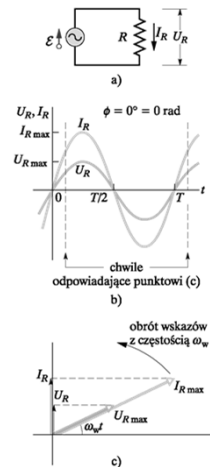
$$\mathcal{E} - U_R = 0$$

- ✓ napięcie na oporniku i natężenie prądu

$$U_R = \mathcal{E}_m \sin(\omega_w t)$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \sin(\omega_w t)$$

$$U_{Rm} = \mathcal{E}_m, \quad I_{Rm} = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$$



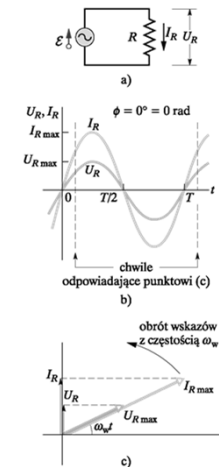
Źródło zmiennej SEM przy obciążeniu oporowym

$$\begin{cases} U_R = U_{Rm} \sin(\omega_w t) \\ I_R = I_{Rm} \sin(\omega_w t) \end{cases}$$

$$U_{Rm} = I_{Rm} R$$

- ✓ brak przesunięcia fazowego między napięciem a natężeniem

$$\varphi = 0$$



Źródło zmiennej SEM przy obciążeniu pojemnościowym

- ✓ II prawo Kirchhoffa

$$\mathcal{E} - U_C = 0$$

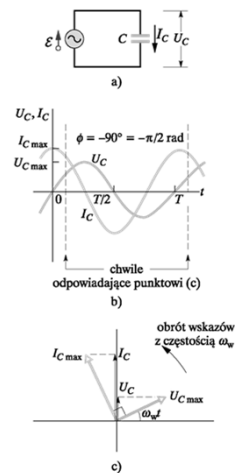
- ✓ napięcie na okładkach kondensatora i natężenie prądu

$$U_C = \mathcal{E}_m \sin(\omega_w t)$$

$$q_C = C U_C = C \mathcal{E}_m \sin(\omega_w t)$$

$$I_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_w C \mathcal{E}_m \cos(\omega_w t)$$

$$U_{Cm} = \mathcal{E}_m, \quad I_{Cm} = \omega_w C \mathcal{E}_m$$



Źródło zmiennej SEM przy obciążeniu pojemnościowym

$$\begin{cases} U_C = U_{Cm} \sin(\omega_w t) \\ I_C = I_{Cm} \sin(\omega_w t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

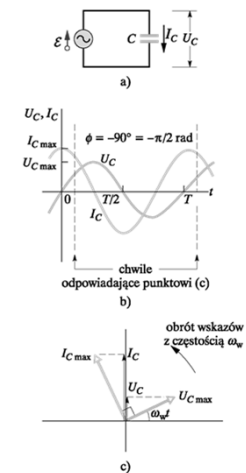
- ✓ reaktancja pojemnościowa

$$X_C = \frac{1}{\omega_w C}$$

$$U_{Cm} = I_{Cm} X_C$$

- ✓ przesunięcie fazowe

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$



Źródło zmiennej SEM przy obciążeniu indukcyjnym

- ✓ II prawo Kirchhoffa

$$\varepsilon - U_L = 0$$

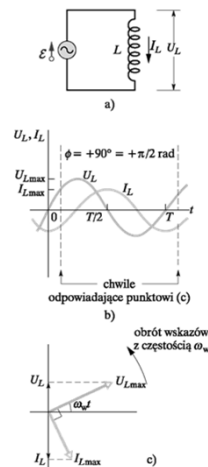
- ✓ napięcie na solenoidzie i natężenie prądu

$$U_L = \varepsilon_m \sin(\omega_w t)$$

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}$$

$$I_L = \frac{\varepsilon_m}{L} \int \sin(\omega_w t) dt = -\frac{\varepsilon_m}{\omega_w L} \cos(\omega_w t)$$

$$U_{Lm} = \varepsilon_m, \quad I_{Lm} = \frac{\varepsilon_m}{\omega_w L}$$



Fizyka ogólna 3 – fizyka falowa i optyka

W. Drozdowski

33

Źródło zmiennej SEM przy obciążeniu indukcyjnym

$$\begin{cases} U_L = U_{Lm} \sin(\omega_w t) \\ I_L = I_{Lm} \sin(\omega_w t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

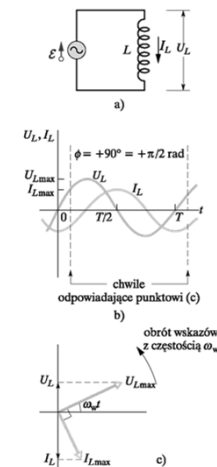
- ✓ reaktancja indukcyjna

$$X_L = \omega_w L$$

$$U_{Lm} = I_{Lm} X_L$$

- ✓ przesunięcie fazowe

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$



Fizyka ogólna 3 – fizyka falowa i optyka

W. Drozdowski

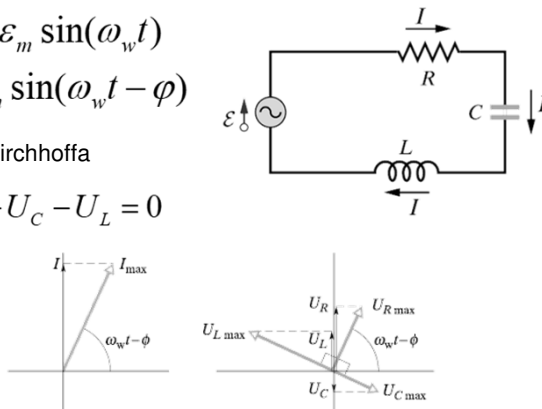
34

Źródło zmiennej SEM w obwodzie RLC

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega_w t) \\ I = I_m \sin(\omega_w t - \phi) \end{cases}$$

- ✓ II prawo Kirchhoffa

$$\varepsilon - U_R - U_C - U_L = 0$$

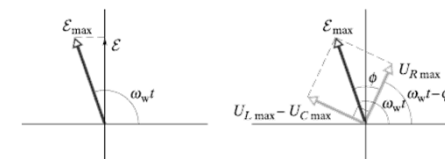


Fizyka ogólna 3 – fizyka falowa i optyka

W. Drozdowski

35

Źródło zmiennej SEM w obwodzie RLC



$$\varepsilon_m^2 = U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2$$

$$\varepsilon_m^2 = I_m^2 R^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2$$

$$\varepsilon_m^2 = I_m^2 [R^2 + (X_L - X_C)^2]$$

Fizyka ogólna 3 – fizyka falowa i optyka

W. Drozdowski

36

Źródło zmiennej SEM w obwodzie RLC

- ✓ amplituda natężenia prądu w obwodzie

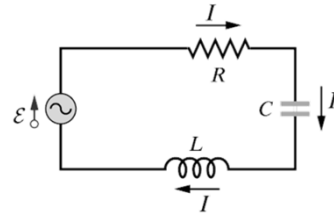
$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

- ✓ zawada (moduł impedancji)

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

- ✓ impedancja (zespolona)

$$Z = |Z|e^{-i\varphi} = R + i(X_L - X_C)$$



Źródło zmiennej SEM w obwodzie RLC

- ✓ amplituda natężenia prądu w obwodzie

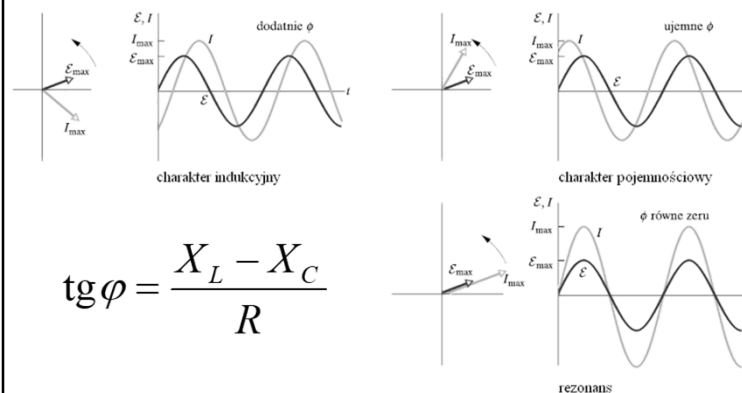
$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{|Z|} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_w L - \frac{1}{\omega_w C})^2}}$$

- ✓ faza początkowa

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{Lm} - U_{Cm}}{U_{Rm}} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

- ✓ $X_L > X_C$ – obwód o charakterze indukcyjnym, $\varphi > 0$
- ✓ $X_L = X_C$ – rezonans, $\varphi = 0$
- ✓ $X_L < X_C$ – obwód o charakterze pojemnościowym, $\varphi < 0$

Źródło zmiennej SEM w obwodzie RLC



Rezonans w obwodzie RLC

- ✓ częstota drgań własnych

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- ✓ maksymalna amplituda natężenia prądu

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{|Z|} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_w L - \frac{1}{\omega_w C})^2}}$$

$$I_m = I_{m \max} \Leftrightarrow \omega_w L = \frac{1}{\omega_w C}$$

$$I_{m \max} = \frac{\varepsilon_m}{R}$$

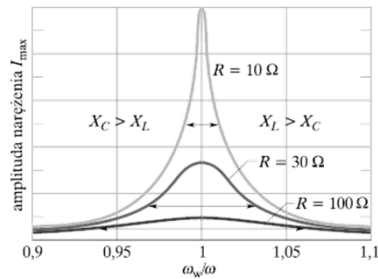
Rezonans w obwodzie RLC

$$\omega_w L = \frac{1}{\omega_w C}$$

$$\omega_w^2 = \frac{1}{LC}$$

✓ warunek rezonansu

$$\omega_w = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega$$



Cyklotron

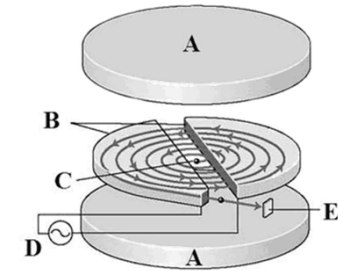
✓ akcelerator cykliczny do przyspieszania cząstek naładowanych

✓ zasadnicze elementy

- ✓ magnesy (A)
- ✓ elektrody, tzw. duanty (B)
- ✓ źródło cząstek (C)
- ✓ generator zmiennego napięcia (D)
- ✓ tarcza (E)

✓ rola pól

- ✓ elektryczne - przyspieszanie
- ✓ magnetyczne - ruch po okręgu



Cyklotron

✓ promień r , okres T i częstość kołowa ω

$$F_{\text{magn}} = F_r$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}, \quad \omega = \frac{qB}{m}$$

Cyklotron

✓ ruch jednostajny cząstki po okręgu w obszarze między duantami (za wyjątkiem szczelin)

✓ ruch przyspieszony w szczelinie

✓ konieczność rezonansowego dostrojenia częstości zmian generowanego napięcia ω_{gen} do częstości ruchu cząstki ω

$$\omega_{\text{gen}} = \omega$$

$$m\omega_{\text{gen}} = qB$$