

Drgania tłumione

- ✓ drgania, których amplituda maleje w czasie wskutek działania zewnętrznych sił tłumiących
- ✓ najczęstsza reprezentacja siły tłumienia

$$F_t = -bv = -b\dot{x}$$

- ✓ równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$$

Drgania tłumione

- ✓ oznaczenia

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{b}{m} = 2\beta$$

- ✓ β - współczynnik tłumienia, ω_0 – częstość drgań własnych
- ✓ równanie ruchu

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = 0$$

- ✓ poszukiwane rozwiązanie

$$x(t) \sim e^{\lambda t}$$

Drgania tłumione

$$x = e^{\lambda t}, \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} = \lambda x, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 x$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Drgania tłumione

- ✓ rozwiązanie ogólne

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t})$$

- ✓ zależność amplitud C_1 i C_2 od warunków brzegowych

$$C_1 = \frac{\lambda_2 x(0) - \dot{x}(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$C_2 = x(0) - \frac{\lambda_2 x(0) - \dot{x}(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Drgania tłumione

Przypadki szczególne

- ✓ tłumienie podkrytyczne – „zwykle” drgania tłumione

$$\beta < \omega_0$$

- ✓ tłumienie krytyczne

$$\beta = \omega_0$$

- ✓ tłumienie nadkrytyczne

$$\beta > \omega_0$$

Tłumienie podkrytyczne

$$\beta < \omega_0$$

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\lambda_1 = -\beta - i\omega, \quad \lambda_2 = -\beta + i\omega$$

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t})$$

- ✓ czynnik gasnący (wykładniczy zanik amplitudy)

$$x(t) \sim e^{-\beta t}$$

- ✓ czynnik oscylujący

$$x(t) \sim C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t} \sim \cos(\omega t + \vartheta)$$

Tłumienie krytyczne

$$\beta = \omega_0$$

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$$

$$x(t) = C e^{-\beta t}$$

- ✓ „zerwanie” drgań, bardzo szybki powrót do położenia równowagi (wykładniczy)

Tłumienie nadkrytyczne

$$\beta > \omega_0$$

$$\lambda_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\lambda_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2|$$

$$x(t) \approx C_2 e^{\lambda_2 t}$$

- ✓ „zerwanie” drgań, powrót do położenia równowagi

Logarytmiczny dekrement tłumienia

- ✓ dekrement tłumienia – stosunek dwóch kolejnych amplitud drgań w przypadku tłumienia podkrytycznego

$$\delta = \frac{A_k}{A_{k+1}}$$

- ✓ logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\Lambda = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}}$$

$$\Lambda = \frac{1}{m-k} \ln \frac{A_k}{A_m}$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia

$$x(t) = C e^{-\beta t} \cos(\omega t + \vartheta) = A(t) \cos(\omega t + \vartheta)$$

$$A_k = C e^{-\beta t_k}, \quad A_{k+1} = C e^{-\beta(t_k+T)}$$

$$\delta = \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{C e^{-\beta t_k}}{C e^{-\beta(t_k+T)}} = \frac{1}{e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\delta = e^{\frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$$

$$\Lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Drgania wymuszone

- ✓ drgania (tłumione), których amplituda jest podtrzymywana za pomocą okresowo zmiennej siły wymuszającej
- ✓ najprostsza postać siły wymuszającej

$$F_w = P \cos(\omega t)$$

- ✓ równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + P \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{P}{m} \cos(\omega t)$$

Drgania wymuszone

- ✓ oznaczenia

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{b}{m} = 2\beta, \quad \frac{P}{m} = \Pi$$

- ✓ równanie ruchu

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = \Pi \cos(\omega t)$$

- ✓ poszukiwane rozwiązanie

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta)$$

Drgania wymuszone

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \vartheta)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \vartheta) = -\omega^2 x$$

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \vartheta) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \vartheta) + \\ -2A\beta\omega \sin(\omega t + \vartheta) = \Pi \cos(\omega t)$$

$$\sin(\omega t + \vartheta) = \sin(\omega t) \cos \vartheta + \cos(\omega t) \sin \vartheta$$

$$\cos(\omega t + \vartheta) = \cos(\omega t) \cos \vartheta - \sin(\omega t) \sin \vartheta$$

Drgania wymuszone

$$-A\omega^2 \cos(\omega t) \cos \vartheta + A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \vartheta + \\ + A\omega_0^2 \cos(\omega t) \cos \vartheta - A\omega_0^2 \sin(\omega t) \sin \vartheta + \\ -2A\beta\omega \sin(\omega t) \cos \vartheta - 2A\beta\omega \cos(\omega t) \sin \vartheta = \\ = \Pi \cos(\omega t)$$

$$A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \vartheta - A\omega_0^2 \sin(\omega t) \sin \vartheta - 2A\beta\omega \sin(\omega t) \cos \vartheta = \\ = A\omega^2 \cos(\omega t) \cos \vartheta - A\omega_0^2 \cos(\omega t) \cos \vartheta + \\ + 2A\beta\omega \cos(\omega t) \sin \vartheta + \Pi \cos(\omega t)$$

Drgania wymuszone

$$(A\omega^2 \sin \vartheta - A\omega_0^2 \sin \vartheta - 2A\beta\omega \cos \vartheta) \sin(\omega t) = \\ = (A\omega^2 \cos \vartheta - A\omega_0^2 \cos \vartheta + 2A\beta\omega \sin \vartheta + \Pi) \cos(\omega t)$$

$$A[(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \vartheta - 2\beta\omega \cos \vartheta] \sin(\omega t) = \\ = [A(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \vartheta + 2A\beta\omega \sin \vartheta + \Pi] \cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \vartheta - 2\beta\omega \cos \vartheta = 0 \\ A(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \vartheta + 2A\beta\omega \sin \vartheta + \Pi = 0 \end{cases}$$

Drgania wymuszone

$$(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \vartheta - 2\beta\omega \cos \vartheta = 0$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\vartheta = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\begin{cases} A(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \vartheta - 2A\beta\omega \cos \vartheta = 0 \\ A(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \vartheta + 2A\beta\omega \sin \vartheta = -\Pi \end{cases}$$

Drgania wymuszone

$$\begin{cases} A^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \sin^2 \vartheta - 4A^2\beta\omega(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ \quad + 4A^2\beta^2\omega^2 \cos^2 \vartheta = 0 \\ A^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \cos^2 \vartheta + 4A^2\beta\omega(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ \quad + 4A^2\beta^2\omega^2 \sin^2 \vartheta = \Pi^2 \end{cases}$$

$$A^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4A^2\beta^2\omega^2 = \Pi^2$$

$$A = \frac{\Pi}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Drgania wymuszone

$$x(t) = \frac{\Pi}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2})$$

- ✓ drgania z częstotliwością siły wymuszającej ω
- ✓ amplituda drgań zależna od trzech wielkości
 - ✓ częstotliwości drgań własnych ω_0
 - ✓ częstotliwości siły wymuszającej ω
 - ✓ stałej tłumienia β

Rezonans mechaniczny

- ✓ wzrost amplitudy drgań występujący przy określonej częstotliwości (tzw. częstotliwości rezonansowej)
- ✓ warunek rezonansu w przypadku drgań wymuszonych

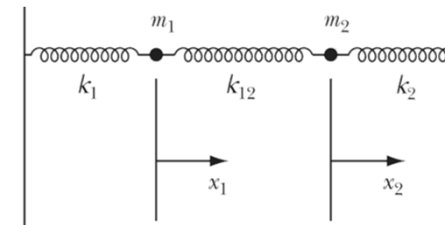
$$\omega \cong \omega_0$$

- ✓ przy braku tłumienia ($\beta = 0$) teoretyczny wzrost amplitudy do nieskończoności

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\Pi}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} = +\infty$$

Rezonans mechaniczny

- ✓ prosty model dwóch oscylatorów sprzężonych



$$F_1 = -k_1x_1 + k_{12}(x_2 - x_1)$$

$$F_2 = -k_2x_2 + k_{12}(x_1 - x_2)$$

Rezonans mechaniczny

- ✓ układ równań ruchu

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 + k_{12}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

- ✓ założenia upraszczające

$$m_1 = m_2 = m, \quad k_1 = k_2 = k \neq k_{12}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m \ddot{x}_2 = -kx_2 + k_{12}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Rezonans mechaniczny

- ✓ uporządkowanie względem położań

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + (k + k_{12})x_1 - k_{12}x_2 = 0 \\ m \ddot{x}_2 + (k + k_{12})x_2 - k_{12}x_1 = 0 \end{cases}$$

- ✓ poszukiwane rozwiązania

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{i\omega t} \\ x_2(t) = A_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

Rezonans mechaniczny

$$\begin{cases} -mA_1\omega^2 e^{i\omega t} + (k + k_{12})A_1 e^{i\omega t} - k_{12}A_2 e^{i\omega t} = 0 \\ -mA_2\omega^2 e^{i\omega t} + (k + k_{12})A_2 e^{i\omega t} - k_{12}A_1 e^{i\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k + k_{12} - m\omega^2)A_1 - k_{12}A_2 = 0 \\ -k_{12}A_1 + (k + k_{12} - m\omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} k + k_{12} - m\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

Rezonans mechaniczny

$$(k + k_{12} - m\omega^2)^2 - k_{12}^2 = 0$$

$$m^2\omega^4 - 2m(k + k_{12})\omega^2 + k^2 + 2kk_{12} = 0$$

$$\Delta = 4m^2(k + k_{12})^2 - 4m^2(k^2 + 2kk_{12})$$

$$\Delta = 4m^2k_{12}^2, \quad \sqrt{\Delta} = 2mk_{12}$$

$$\omega_s^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_{as}^2 = \frac{k + 2k_{12}}{m}$$

Rezonans mechaniczny

- ✓ dwa mody drgań
 - ✓ symetryczny (ω_s)
 - ✓ antysymetryczny (ω_{as})

$$\omega_s = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{as} = \pm \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$$

- ✓ rozwiązanie ogólne

$$\begin{cases} x_1(t) = A_s^+ e^{i\omega_s t} + A_s^- e^{-i\omega_s t} + A_{as}^+ e^{i\omega_{as} t} + A_{as}^- e^{-i\omega_{as} t} \\ x_2(t) = A_s^+ e^{i\omega_s t} + A_s^- e^{-i\omega_s t} - A_{as}^+ e^{i\omega_{as} t} - A_{as}^- e^{-i\omega_{as} t} \end{cases}$$

„Rezonansowe” katastrofy

- ✓ Broughton Bridge (Anglia), 12 kwietnia 1831 r.
 - ✓ zerwanie przy jednym z przyczółków z powodu rezonansu (zbliżone częstotliwości kroku marszowego żołnierzy i drgań własnych mostu)
 - ✓ 20 rannych
- ✓ Pont de la Basse-Chaine (Francja), 16 kwietnia 1850 r.
 - ✓ całkowite zerwanie mostu z powodu rezonansu (jw.)
 - ✓ 226 ofiar śmiertelnych, liczba rannych nieznana
- ✓ Tacoma Narrows Bridge (USA, stan Washington), 7 listopada 1940 r.
 - ✓ całkowite zerwanie mostu z powodu rezonansu (zbliżone częstości porywów wiatru i drgań własnych mostu)
 - ✓ bez ofiar (poza psem uwięzionym w samochodzie)

„Rezonansowe” katastrofy

- ✓ Ciudad de México (Meksyk), 19 września 1985 r.
 - ✓ trzęsienie ziemi (8.1 stopni w skali Richtera)
 - ✓ 10153 ofiar śmiertelnych, poważne uszkodzenia wielu budynków
 - ✓ epicentrum 350 km od miasta - bardzo prawdopodobny udział zjawiska rezonansu w propagacji trzęsienia

nature

SEARCH JOURNAL [GO] [my account](#) [e alerts](#) [subscriptions](#) [register](#)

Journal Home
Current Contents
RSS
Archives

Friday 23 February 2012

letters to nature
Volume 526, 781–783 (23 April 1987), doi:10.1038/324784a0

ARTICLE IN PRESS

Download PDF
References
Export citation
Export references
Send to a friend
How to cite this item
Table of Contents
© 1987 Nature Publishing Group

Possible resonance effect in the distribution of earthquake damage in Mexico City

J. FLORES, O. NOVAES & T. M. BELLOUARD

The destruction caused by the earthquake of 19 September 1985 in Mexico City shows three remarkable features¹. First, a concentration of damage in the former lake bed; second, a peculiar distribution of high- and low-damage areas alternating within a few city blocks; and third, a selectivity for buildings between five and fifteen stories high. While the last point is understood by civil engineers² and the first confirms the relevance of the soft ground, the second feature is the most puzzling. To a physicist such a pattern evokes the idea of a standing wave, with low- and high-damage areas corresponding to nodes and antinodes. This suggests a resonance phenomenon of the waterlogged ground moving collectively. From the Navier equations of classical elasticity, it is known³ that a transfer of the incoming seismic-wave energy to longitudinal waves takes place if a sharp change from hard to soft ground exists. Solving then the two-dimensional Poisson equation for the longitudinal waves within the ancient lake boundaries, we show that for the observed seismic wave period of 2 s, a standing-wave solution exists which explains qualitatively the damage distribution pattern.