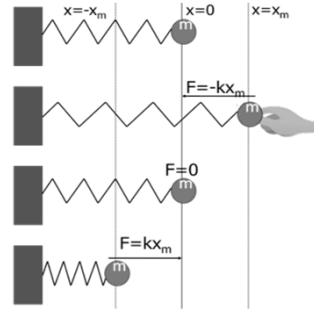


## Siła harmoniczna

- ✓ siła  $F$  wprost proporcjonalna do wychylenia  $x$  z położenia równowagi, zwrócona w jego stronę

$$F = -kx$$

- ✓  $k$  – stała sprężystości zależna od rodzaju materiału



## Oscylator harmoniczny

- ✓ II zasada dynamiki + siła harmoniczna

$$a = \frac{F}{m}, \quad F = -kx$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$a + \omega^2 x = 0$$

- ✓ równanie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

## Oscylator harmoniczny

- ✓ rozwiązanie równania oscylatora

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- ✓  $x_m$  – amplituda drgań,  $\omega$  – częstość kołowa,  $\varphi$  – faza początkowa

- ✓ sprawdzenie

$$\dot{x} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

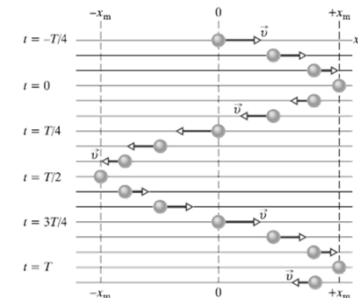
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

## Ruch harmoniczny

- ✓ amplituda  $x_m$  – maksymalne wychylenie z położenia równowagi
- ✓ okres  $T$  – czas trwania jednego pełnego drgania
- ✓ częstość  $\nu$  – liczba pełnych drgań w jednostce czasu
- ✓ okres  $T$  a częstość kołowa  $\omega$

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$[\nu] = \frac{1}{s} = \text{Hz}, \quad [\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$$



## Położenie, prędkość, przyspieszenie

- ✓ położenie

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- ✓ prędkość

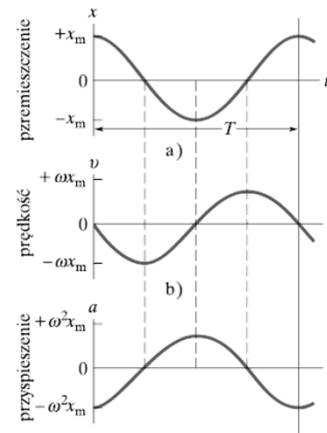
$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} [x_m \cos(\omega t + \varphi)]$$

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- ✓ przyspieszenie

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt} [-\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi)$$



## Energia potencjalna i kinetyczna

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2, \quad E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k [x_m \cos(\omega t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m [-\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

## Energia całkowita w ruchu harmonicznym

$$E_p(t) = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2} kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

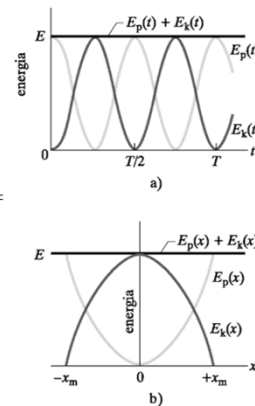
$$E(t) = E_p(t) + E_k(t)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} kx_m^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$E(t) = \frac{1}{2} kx_m^2 = \text{const.}$$



## Wahadło matematyczne

- ✓ punktowa masa  $m$  zawieszona na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości  $L$

- ✓ siły działające na masę

- ✓ siła ciężkości  $E_g$

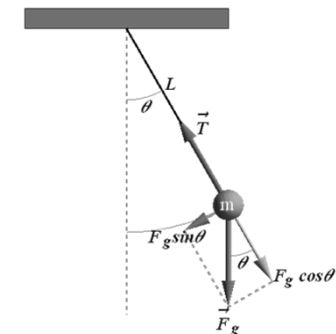
- ✓ siła naciągu nici  $I$

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{g\parallel} + \vec{F}_{g\perp}$$

$$F_{g\parallel} = F_g \cos \theta = mg \cos \theta$$

$$F_{g\perp} = F_g \sin \theta = mg \sin \theta$$

$$F_{g\parallel} = T$$



## Wahadło matematyczne

- ✓ niewielkie wychylenia (kąty  $\theta$ ) – przybliżenie ruchu w poziomie

$$m\ddot{x} = -F_{g\perp}$$

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{s}{L} \approx \frac{x}{L}$$

$$F_{g\perp} = mg \sin \theta \approx mg \frac{x}{L}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

## Wahadło matematyczne

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- ✓ izochronizm – niezależność okresu drgań od ich amplitudy

## Wahadło fizyczne

- ✓ bryła sztywna obracająca się wokół poziomej osi nieprzechodzącej przez środek ciężkości

- ✓ moment siły

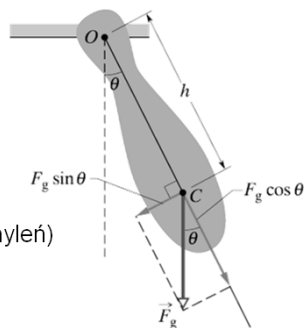
$$M = -hF_{g\perp} = -mgh \sin \theta$$

- ✓ przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = -\frac{mgh \sin \theta}{I}$$

- ✓ równanie oscylatora (dla małych wychyleń)

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{I} \theta = 0$$



## Wahadło fizyczne

- ✓ częstość kołowa i okres drgań

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

- ✓ długość zredukowana

$$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

$$L = \frac{I}{mh}$$

## Wahadło torsyjne

- ✓ bryła sztywna zawieszona na elemencie sprężystym (zwykle drucie czy pręcie), wykonująca drgania skrętne

- ✓ moment siły

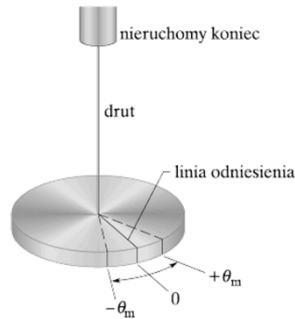
$$M = -\kappa\theta$$

- ✓ przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = -\frac{\kappa\theta}{I}$$

- ✓ równanie oscylatora

$$\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$



## Wahadło torsyjne

- ✓ częstość kołowa i okres drgań

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{I}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

- ✓ moment kierujący  $\kappa$  - wielkość zależna od długości i średnicy drutu (pręta), na którym zawieszono wahadło, jak również od materiału, z którego go wykonano

## Rurka w kształcie litery U

- ✓ ciężar nierównoważonego słupa cieczy źródłem siły harmoniczej

$$F(y) = -m(y)g$$

$$m(y) = \rho V(y) = \rho \cdot 2Sy$$

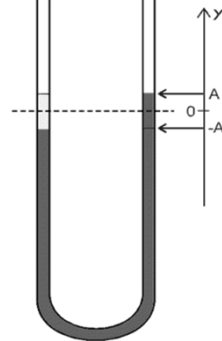
$$F(y) = -2S\rho gy$$

- ✓ równanie oscylatora

$$\ddot{y} + \frac{2S\rho g}{M}y = 0$$

- ✓ okres drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2S\rho g}}$$



## Dwa ciała sprężyste a efektywna stała sprężystości

- ✓ „połączenie szeregowe”

$$\begin{cases} F = -k_1 y_1 \\ F = -k_2 y_2 \end{cases}$$

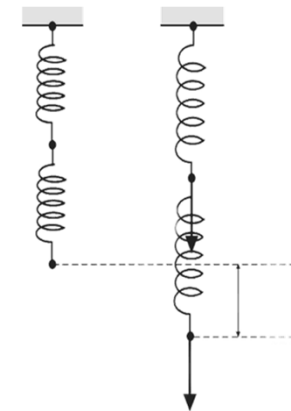
$$y_1 + y_2 = y$$

$$F = -ky$$

$$y_1 = -\frac{F}{k_1}, \quad y_2 = -\frac{F}{k_2}, \quad y = -\frac{F}{k}$$

$$-\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} = -\frac{F}{k}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



## Dwa ciała sprężyste a efektywna stała sprężystości

✓ „połączenie równoległe”

$$\begin{cases} F_1 = -k_1 y \\ F_2 = -k_2 y \end{cases}$$

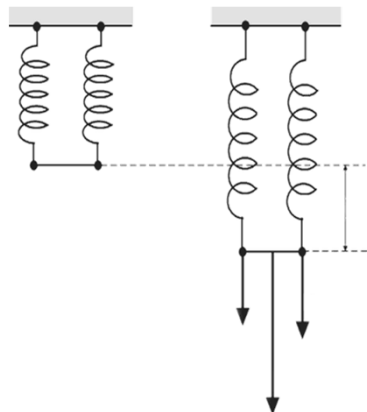
$$F_1 + F_2 = F$$

$$F = -ky$$

$$-k_1 y - k_2 y = -ky$$

$$(k_1 + k_2)y = ky$$

$$k = k_1 + k_2$$



## Figury Lissajous

✓ składanie drgań  
wzajemnie prostopadłych

$$x = x_m \cos(\omega_x t)$$

$$y = y_m \cos(\omega_y t + \varphi)$$

## Figury Lissajous

✓ przykład nr 1:  $x_m = y_m = A$ ,  $\omega_x = \omega_y = \omega$ ,  $\varphi = 0$

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$y = A \cos(\omega t)$$

$$y = x \text{ (linia prosta)}$$

✓ przykład nr 2:  $x_m = y_m = A$ ,  $\omega_x = \omega_y = \omega$ ,  $\varphi = \pi/2$

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$y = A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -A \sin(\omega t)$$

$$x^2 = A^2 \cos^2(\omega t), \quad y^2 = A^2 \sin^2(\omega t)$$

$$x^2 + y^2 = A^2 \text{ (okrąg)}$$

## Figury Lissajous

✓ przykład nr 3:  $x_m = y_m = A$ ,  $\omega_x = \omega$ ,  $\omega_y = 2\omega$ ,  $\varphi = 0$

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$y = A \cos(2\omega t)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$y = A[2 \cos^2(\omega t) - 1] = A(2 \frac{x^2}{A^2} - 1)$$

$$y = \frac{2}{A} x^2 - A \text{ (parabola)}$$