

## Zad. 9. Wyznaczanie wektorów własnych macierzy do znanej wartości własnej

e-mail: [andrzej.kedziorski@fizyka.umk.pl](mailto:andrzej.kedziorski@fizyka.umk.pl)

tel.: 56611-3274

pokój: 485B

<http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/>

## Zadanie 9

Napisz program wyznaczający wektor własny macierzy kwadratowej  $\mathbf{A}$  przy zadanej wartości własnej.

# Zagadnienie własne

- ▶ Równanie własne macierzy kwadratowej  $n \times n$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{1})\mathbf{x}_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$\mathbf{x}_i$  wektor własny ( $n \times 1$ ),  $\lambda_i$  - wartość własna (liczba, w ogólności może być zespolona)

- ▶ Def.  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$ , gdzie  $\mathbf{x}_k$  to kolumna  $n \times 1$ , będąca wektorem własnym macierzy  $\mathbf{A}$  przy wartości własnej  $\lambda_k$
- ▶ Rozkład spektralny macierzy  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1},$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest macierzą diagonalną o elementach  $(\mathbf{D})_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$  oraz  $\det \mathbf{X} \neq 0$  (wektory  $\mathbf{x}_k$  są liniowo niezależne)

- ▶ Rozkład spektralny macierzy odwrotnej  $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}^{-1},$$

gdzie  $\mathbf{D}^{-1}$  jest macierzą diagonalną o elementach  $(\mathbf{D}^{-1})_{ij} = \lambda_i^{-1}\delta_{ij}$

## Nawiązanie do (odwrotnej) metody przesuniętych iteracji

- ▶ Równanie własne macierzy  $\mathbf{A}_s = \mathbf{A} - s\mathbf{1}$ , gdzie  $s \in \mathbb{R}$  oraz  $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k$

$$\mathbf{A}_s\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k - s\mathbf{1}\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k - s\mathbf{x}_k = (\lambda_k - s)\mathbf{x}_k$$

Macierz  $\mathbf{A}_s$  ma te same wektory własne co macierz  $\mathbf{A}$ , a wartości własne są „przesunięte” o  $s$ , tzn.  $\lambda_s = \lambda_k - s$

- ▶ Rozkład spektralny macierzy  $\mathbf{A}_s$  oraz  $\mathbf{A}_s^{-1}$

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{X}\mathbf{D}_s\mathbf{X}^{-1} \quad (\mathbf{D}_s)_{ij} = (\lambda_i - s)\delta_{ij}$$

$$\mathbf{A}_s^{-1} = \mathbf{X}\mathbf{D}_s^{-1}\mathbf{X}^{-1} \quad (\mathbf{D}_s^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i - s}$$

- ▶ Rozważmy wektor próbny  $\mathbf{x}^{(0)} = \sum_{k=1}^n c_k\mathbf{x}_k$  (wektory  $\mathbf{x}_k$  są liniowo niezależne, więc dowolny wektor można przedstawić jako ich kombinację liniową)

$$\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{x}_k = \frac{1}{\lambda_k - s}\mathbf{x}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_k - s}\mathbf{x}_k$$

## Nawiązanie do (odwrotnej) metody przesuniętych iteracji -c.d.

- ▶ Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  ma różne wartości, tzn.  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ , to dla  $s \approx \lambda_i$  mamy

$$\left| \frac{1}{\lambda_i - s} \right| \gg \left| \frac{1}{\lambda_k - s} \right| \quad k \neq i$$

$$\mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{x}^{(0)} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_k - s} \mathbf{x}_k \approx \frac{c_i}{\lambda_i - s} \mathbf{x}_i \equiv \frac{c_i}{\epsilon} \mathbf{x}_i,$$

gdzie  $\lambda_i - s \equiv \epsilon$ ; **ważne**  $c_i \neq 0$

- ▶ Jeżeli  $|c_i| \sim 1$ ,  $|\epsilon| \ll 1$  oraz  $\|\mathbf{x}^{(0)}\| \sim 1$ , to dla  $s \rightarrow \lambda_i$ , czyli  $\epsilon \rightarrow 0$ , mamy

$$\mathbf{A}_s \mathbf{x}_i = \frac{\epsilon}{c_i} \mathbf{x}^{(0)} \rightarrow \mathbf{0},$$

bo w granicy otrzymujemy  $\mathbf{A}_s \rightarrow \mathbf{A}_{\lambda_i}$ , czyli

$$\mathbf{A}_{\lambda_i} \mathbf{x}_i = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}) \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

# Algorytm

1. Obliczamy  $\mathbf{A}_s = \mathbf{A} - s\mathbf{1}$ , gdzie  $s = \lambda_j - \epsilon$  oraz  $\epsilon \sim 0$
2. Rozkładamy  $\mathbf{A}_s = \mathbf{LUP}$  (metoda Doolittle'a)
3. Dla próbnego wektora  $\mathbf{x}^{(0)}$ , gdzie  $\|\mathbf{x}^{(0)}\| = 1$  rozwiązujemy równanie

$$\mathbf{A}_s \mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)}$$

(korzystamy z rozkładu LUP)

4. Skalujemy (normujemy)  $\mathbf{y}^{(1)}$ , tzn.  $\mathbf{x}^{(1)} = \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{\|\mathbf{y}^{(1)}\|}$ , wtedy  $\|\mathbf{x}^{(1)}\| = 1$ ;  $\mathbf{x}^{(1)}$  jest szukany wektorem własnym  $\mathbf{x}_i$  (lub jego kolejnym przybliżeniem)
5. W ogólności, punkty 3 i 4 należy powtórzyć

## Uwagi

- ▶ Macierz  $\mathbf{A}_s$  jest prawie osobliwa dla  $\epsilon \sim 0$
- ▶  $\det \mathbf{A}_s \sim 0$ , więc w metodzie Doolittle'a  $\det \mathbf{L} = 1$  oraz  $\det \mathbf{U} \sim 0$
- ▶ Minimalna wartość  $\epsilon \sim \lambda_i \epsilon_{mach} \neq 0$ , bo chcemy uniknąć  $\det \mathbf{U} = 0$ ; z drugiej strony chcemy mieć procedurę jednokrokową, co jest możliwe, gdy  $\epsilon \sim 0$
- ▶  $\|y\| \sim \frac{1}{|\epsilon|} \gg 1$ , np. w podwójnej precyzji  $\|y\| \sim 10^{15}$ , wtedy
$$\|\mathbf{A}_s \mathbf{x}^{(1)}\| = \frac{\|\mathbf{x}^{(0)}\|}{\|\mathbf{y}^{(1)}\|} \sim 10^{-15}$$
- ▶ Wektor próbny taki, że  $\mathbf{x}^{(0)T} \mathbf{x}_i \neq 0$

# Inne podejście do rozwiązania

- ▶ Zakładamy, że  $\mathbf{A}$  ma różne wartości własne
- ▶  $\mathbf{A}_{\lambda_i} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$
- ▶  $\mathbf{A}_{\lambda_i}$  jest osobliwa, tzn.  $\det \mathbf{A}_{\lambda_i} = 0$
- ▶ Rozkład LU metodą Doolittle'a z częściowym wyborem elementu głównego

$$\mathbf{A}_{\lambda_i} = \mathbf{LUP},$$

gdzie  $\det \mathbf{L} = 1$ ,  $\det \mathbf{U} = 0$ , ostatni wiersz macierzy  $\mathbf{U}$  jest wypełniony zerami

- ▶ Układ równań na składowe  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{A}_{\lambda_i} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ , ma nieskończenie wiele rozwiązań i (przynajmniej) jeden dowolny parametr
- ▶ Oznaczmy  $\mathbf{P}\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i$ ,  $\mathbf{U}\mathbf{x}'_i = \mathbf{y}_i$ , wtedy

$$\mathbf{A}_{\lambda_i} \mathbf{x}_i = \mathbf{L}\mathbf{y}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{U}\mathbf{x}'_i = \mathbf{0}$$

(ponieważ  $\mathbf{L}$  nie jest osobliwa, to  $\mathbf{y}_i = \mathbf{0}$ )

## Algorytm "2"

1. Wyznaczamy  $\mathbf{A}_{\lambda_i} = \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}$
2. Rozkładamy macierz  $\mathbf{A}_{\lambda_i} = \mathbf{LUP}$  metodą Doolittle'a z częściowym wyborem elementu głównego
3. Rozwiązujemy układ równań

$$\mathbf{U}\mathbf{x}'_i = \mathbf{0}$$

kładąc np.  $(\mathbf{x}'_i)_n = 1$  i wyznaczając pozostałe składowe  $(\mathbf{x}'_i)_k$ ,  
 $k = 1, \dots, n - 1$ , metodą podstawiania wstecz

4. Wektor własny  $\mathbf{x}_i = \mathbf{P}^{Tr} \mathbf{x}'_i$
5. Możemy unormować wektor własny, tzn.  $\mathbf{x}_i \rightarrow \frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_i\|}$



## Do zrobienia

1. Wczytać macierz  $\mathbf{A}$  o wymiarach  $n \times n$  i elementach rzeczywistych oraz jej wartości własne
2. Wyznaczyć wektory własne  $\mathbf{x}_i$  macierzy  $\mathbf{A}$  do kolejnych wartości własnych  $\lambda_i$
3. Sprawdzać, czy  $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$
4. Wyznaczyć wektory własne dla macierzy symetrycznej i niesymetrycznej
5. Zbadać zachowanie metody dla macierzy, która ma przynajmniej dwie takie same wartości własne

## Przykłady

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2.76300328661375, -1.72368589498208, -5.03931739163167$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0.475 & -0.65 & 4.5 & -1.625 \\ 1.1 & -1.4 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1.7292612617663754, -0.0437773119849116, 0.7322067668156992, \\ 18.0408318069355893$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -14 & 3 \\ -2 & 25 & -22 & 4 \\ -3 & 31 & -27 & 5 \\ -2 & 34 & -32 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1, 1, 2, 3$$