Zad. 6. Wskaźnik uwarunkowania macierzy

e-mail: andrzej.kedziorski@fizyka.umk.pl
tel.: 56611-3274
pokój: 485B
http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/

Zadanie 6

Napisz program wyznaczający macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$ na podstawie rozkładu LU, a także wskaźnik uwarunkowania macierzy $\mathbf{A}$. Ocenić jak skalowanie układu równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ wpływa na wskaźnik uwarunkowania macierzy $\mathbf{A}$, a przez to na dokładność rozwiązań układu równań.

Normy wektorów

- Własności normy wektora

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{x}\| \geqslant 0\\&\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}\\&\forall_\gamma\ \|\gamma\mathbf{x}\| = |\gamma|\,\|\mathbf{x}\|\\&\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leqslant \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|\end{aligned}$$

- Różne definicje normy wektorów

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|\\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}\\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\end{aligned}$$

Norma macierzy zgodna z normą wektora

$$\|\mathbf{Ax}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$$

Czyli

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Własności normy macierzy

$$\begin{aligned}
&\forall_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \\
&\|\mathbf{A}\| \geqslant 0 \\
&\forall_{\gamma} \|\gamma\mathbf{A}\| = |\gamma|\|\mathbf{A}\| \\
&\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \\
&\|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|
\end{aligned}$$

Definicje normy macierzy

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Analiza błędów: wskaźnik uwarunkowania macierzy

Jeśli $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$, to $\|\mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$ i $\|\delta\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\|$, więc

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \mathrm{cond}(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Jeśli $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, to $\|\delta\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|$, więc

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} = \mathrm{cond}(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

- Wskaźnik uwarunkowania macierzy $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$
- Dla macierzy osobliwej $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \infty$

Na podstawie wykładu: J. Kobus, Metody numeryczne, 2014/2015

Macierz odwrotna

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}$$

- Równanie na k-tą kolumnę $\mathbf{x}_k$ macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, ..., n$$

  gdzie $\mathbf{e}_k$ jest k-tą kolumną macierzy jednostkowej
- Wygodniej jest skorzystać z rozkładu $\mathbf{A} = \mathbf{LUP}$, wtedy $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$
- Kolumny macierzy odwrotnych $\mathbf{L}^{-1}$ i $\mathbf{U}^{-1}$ można wyznaczyć stosując metodę podstawiania wprzód i wstecz

$$\mathbf{L}\mathbf{y}_k = \mathbf{e}_k \quad \mathbf{U}\mathbf{z}_k = \mathbf{e}_k \quad k = 1, 2, ..., n$$

  oraz $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{Tr}$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

- Z definicji
$$\operatorname{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$$
- W praktyce unika się odwracania macierzy
- Oszacowanie normy macierzy odwrotnej $\|\mathbf{A}^{-1}\|$
  Jeżeli $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, to $\|\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|$. Stąd
$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \geqslant \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$
  oraz
$$\operatorname{cond}(\mathbf{A}) \geqslant \|\mathbf{A}\|\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Skalowanie układu równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & / \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_{1j}| \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & / \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_{2j}| \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots & \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & / \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_{nj}| \end{cases}$$

Do zrobienia - modyfikacja programu rozwiązującego układy równań liniowych (zob. zad. 5)

1. Wczytać z wejścia wymiar n macierzy $\mathbf{A}$ i elementy tej macierzy oraz elementy kolumny wyrazów wolnych $\mathbf{b}$
2. Dokonać rozkładu LU macierzy $\mathbf{A}$ metodą Doolittle'a (albo Crouta) z częściowym wyborem elementu głównego
3. Rozwiązać układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oraz przeskalowany układ równań $\mathbf{A'x} = \mathbf{b'}$ korzystając z rozkładu LU macierzy z częściowym wyborem elementu głównego
4. Znaleźć macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$ oraz $\mathbf{A'}^{-1}$ (spr. czy $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}$ oraz $\mathbf{A'A'}^{-1} = \mathbf{1}$)
5. Obliczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{A'}$
   - Z definicji
   - Oszacować
6. Sprawdzić, czy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
7. Porównać wyniki programu z wynikami z gotowych procedur (np. korzystając z operatora dzielenia lewostronnego w Matlabie, tzn. $x = A \backslash b$)

Przykłady

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 770 & 0 & 50666 \\ 0 & 770 & 0 & 50666 & 0 \\ 770 & 0 & 50666 & 0 & 3956810 \\ 0 & 50666 & 0 & 3956810 & 0 \\ 50666 & 0 & 3956810 & 0 & 335462666 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 152789 \\ 102102 \\ 11921866 \\ 7964286 \\ 1010395474 \end{pmatrix}$$

(zob. `http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/inp`)