

Zad. 5. Rozwiązywanie układu równań liniowych

e-mail: andrzej.kedziorski@fizyka.umk.pl

pokój: 485B

<http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/>

Zadanie 5

Napisz program rozwiązujący układ równań liniowych $Ax = b$ korzystając z rozkładu LU macierzy A . Program pobiera z wejścia liczbę równań, macierz (kwadratową) układu równań A i wektor wyrazów wolnych (kolumnę) b .

Rozwiązywanie układu równań liniowych o macierzach trójkątnych

- ▶ Rozważmy układ n równań liniowych $Lx = b$ na n niewiadomych, gdzie L jest macierzą trójkątną dolną
- ▶ Rozwiązujemy układ poprzez podstawianie wprzód

$$x_1 = b_1 / \ell_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - \ell_{21}x_1) / \ell_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij}x_j) / \ell_{ii}$$

$$\vdots$$

$$x_n = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} \ell_{nj}x_j) / \ell_{nn}$$

Rozwiązywanie układu równań liniowych o macierzach trójkątnych

- ▶ Rozważmy układ n równań liniowych $Ux = b$ na n niewiadomych, gdzie U jest macierzą trójkątną górną
- ▶ Rozwiązujemy układ poprzez podstawianie wstecz

$$x_n = b_n / u_{nn}$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n) / u_{n-1,n-1}$$

⋮

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j) / u_{ii}$$

⋮

$$x_1 = (b_1 - \sum_{j=2}^n u_{1j}x_j) / u_{11}$$

Rozwiązanie układu równań liniowych, a rozkład LU macierzy kwadratowej $n \times n$

- ▶ Cel: rozwiązanie układu równań liniowych $Ax = b$
- ▶ Dokonaliśmy rozkładu $A = LU$
- ▶ Podstawiamy $LUx = b$ i oznaczamy $Ux \equiv y$, gdzie y jest kolumną $n \times 1$, wtedy mamy do rozwiązania dwa układy równań z macierzami trójkątnymi

$$Ly = b$$

oraz

$$Ux = y$$

Uogólnienie na przypadek rozkładu LU z częściowym wyborem elementu głównego

- ▶ Metoda Doolittle'a z częściowym wyborem elementu głównego prowadzi do rozkładu

$$A = LUP,$$

gdzie P jest ortogonalną ($P^{-1} = P^T$) macierzą permutacji

- ▶ Rozwiązanie układu równań liniowych

$$Ax = b \Rightarrow LUPx = b$$

1. Rozwiązujemy $Ly = b$ metodą podstawiania wprzód
2. Rozwiązujemy $Ux' = y$ metodą podstawiania wstecz, gdzie $x' = Px$
3. Rozwiązanie $x = P^T x'$

Uogólnienie na przypadek rozkładu LU z częściowym wyborem elementu głównego

- ▶ Metoda Crouta z częściowym wyborem elementu głównego prowadzi do rozkładu

$$A = PLU,$$

gdzie P jest ortogonalną ($P^{-1} = P^{Tr}$) macierzą permutacji

- ▶ Rozwiązanie układu równań liniowych

$$Ax = b \Rightarrow PLUx = b$$

1. Rozwiązujemy $Ly = b'$ metodą podstawiania wprzód, gdzie $b' = P^{Tr}b$
2. Rozwiązujemy $Ux = y$ metodą podstawiania wstecz

Do zrobienia - modyfikacja programu na rozkład LU macierzy z częściowym wyborem elementu głównego (zob. zad. 4)

1. Wczytać z wejścia wymiar n macierzy A i elementy tej macierzy oraz elementy kolumny wyrazów wolnych b
2. Dokonać rozkładu LU macierzy A metodą Doolittle'a (albo Crouta) z częściowym wyborem elementu głównego
3. Rozwiązać układ równań $Ax = b$ korzystając z rozkładu LU macierzy z częściowym wyborem elementu głównego
4. Sprawdzić, czy $Ax = b$
5. Porównać wyniki programu z wynikami z gotowych procedur (np. korzystając z operatora dzielenia lewostronnego w Matlabie, tzn. $x = A \setminus b$)

Obliczenia wykonać w pojedynczej precyzji

Przykłady

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 770 & 0 & 50666 \\ 0 & 770 & 0 & 50666 & 0 \\ 770 & 0 & 50666 & 0 & 3956810 \\ 0 & 50666 & 0 & 3956810 & 0 \\ 50666 & 0 & 3956810 & 0 & 335462666 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 152789 \\ 102102 \\ 11921866 \\ 7964286 \\ 1010395474 \end{pmatrix}$$

(zob. <http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/inp>)