Zad. 4. Rozkład LU macierzy kwadratowej z częściowym wyborem elementu głównego

e-mail: andrzej.kedziorski@fizyka.umk.pl
tel.: 56611-3274
pokój: 485
http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/

Zadanie 4

Napisz program dokonujacy rozkładu LU macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ za pomoca schematów zwartych Doolittle'a lub Crouta. Program pobiera z wejścia wymiar macierzy i macierz $\mathbf{A}$. Zmodyfikuj program dokonujący rozkładu LU macierzy metodą Doolittle'a (albo Crouta) włączając częściowy wybór elementu głównego.

Rozkład LU

- $\mathbf{A}$ - nieosobliwa macierz kwadratowa $n \times n$ o elementach rzeczywistych
- $\det \mathbf{A}_k \neq 0$, gdzie $\mathbf{A}_k$ - macierz $k \times k$ utworzona z k początkowych wierszy i kolumn macierzy $\mathbf{A}$
- Rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, gdzie $\mathbf{L}$ - macierz trójkątna dolna $n \times n$, $\mathbf{U}$ - macierz trójkątna górna $n \times n$, tzn.

$$(\mathbf{L})_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ \ell_{ij} & i \geqslant j \end{cases} \qquad (\mathbf{U})_{ij} = \begin{cases} u_{ij} & i \leqslant j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

- Mamy n^2 równań na elementy macierzy $\mathbf{A}$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{L})_{ik} (\mathbf{U})_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \ell_{ik} u_{kj},$$

  gdzie $r = \min(i, j)$
- Jeżeli $\ell_{ii} = 1$ albo $u_{ii} = 1$ dla $i = 1, \ldots, n$, to mamy w sumie do wyznaczenia n^2 elementów macierzy $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$

Schematy zwarte - metoda Doolittle'a

- Zakładamy, że $\ell_{ii} = 1$ dla $i = 1, \ldots, n$
- Wykonujemy $k = 1, \ldots, n$ kroków; w k-tym kroku
  1. Wyznaczamy k-ty wiersz macierzy $\mathbf{U}$ ($j \geqslant k$)

$$a_{kj} = \sum_{p=1}^{k} \ell_{kp} u_{pj} \quad \Rightarrow \quad u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{kp} u_{pj} \quad j = k, k+1, \ldots, n$$

  2. Wyznaczamy k-tą kolumnę macierzy $\mathbf{L}$ ($i > k$)

$$a_{ik} = \sum_{p=1}^{k} \ell_{ip} u_{pk} \quad \Rightarrow \quad \ell_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{ip} u_{pk} \right) / u_{kk} \quad i = k+1, \ldots, n$$

- W pierwszym kroku znamy $\ell_{11} = 1$, co pozwala najpierw wyznaczyć pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{U}$, a to z kolei pozwala wyznaczyć pierwszą kolumnę macierzy $\mathbf{L}$
- W k-tym kroku znamy $\ell_{kk} = 1$, $k-1$ początkowych wierszy macierzy $\mathbf{U}$ i $k-1$ początkowych kolumn macierzy $\mathbf{L}$, to pozwala najpierw wyznaczyć k-ty wiersz macierzy $\mathbf{U}$, a to z kolei pozwala wyznaczyć k-tą kolumnę macierzy $\mathbf{L}$

Schematy zwarte - metoda Crouta

- Zakładamy, że $u_{ii} = 1$ dla $i = 1, \ldots, n$
- Wykonujemy $k = 1, \ldots, n$ kroków; w k-tym kroku
  1. Wyznaczamy k-tą kolumnę macierzy $\mathbf{L}$ $(i \geqslant k)$

$$a_{ik} = \sum_{p=1}^{k} \ell_{ip} u_{pk} \quad \Rightarrow \quad \ell_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{ip} u_{pk} \quad i = k, k+1, \ldots, n$$

  2. Wyznaczamy k-ty wiersz macierzy $\mathbf{U}$ $(j > k)$

$$a_{kj} = \sum_{p=1}^{k} \ell_{kp} u_{pj} \quad \Rightarrow \quad u_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{kp} u_{pj} \right) / \ell_{kk} \quad j = k+1, \ldots, n$$

- W pierwszym kroku znamy $u_{11} = 1$, co pozwala najpierw wyznaczyć pierwszą kolumnę macierzy $\mathbf{L}$, a to z kolei pozwala wyznaczyć pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{U}$
- W k-tym kroku znamy $\ell_{kk} = 1$, $k-1$ początkowych wierszy macierzy $\mathbf{U}$ i $k-1$ początkowych kolumn macierzy $\mathbf{L}$, to pozwala najpierw wyznaczyć k-tą kolumnę macierzy $\mathbf{L}$, a to z kolei pozwala wyznaczyć k-ty wiersz macierzy $\mathbf{U}$

Do zrobienia

1. Wczytać z wejścia wymiar n macierzy $\mathbf{A}$ i elementy tej macierzy
2. Dokonać rozkładu LU macierzy $\mathbf{A}$ metodą Doolittle'a albo Crouta
3. Wypisać na wyjściu macierze trójkątne $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$
4. Sprawdzić, czy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$
5. Porównać wyniki programu z wynikami z gotowych procedur (np. „lu" Matlaba)

Częściowy wybór elementu głównego - motywacje

- Dokonać rozkładu LU macierzy

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- Zamieniamy wiersze w macierzy $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

  Dokonać rozkładu LU tej macierzy
- Czy w obydwu przypadkach udało się dokonać rozkładu LU?

Częściowy wybór elementu głównego - metoda Doolittle'a

- k-ty krok metody Doolittle'a
  1. Wyznaczamy k-ty wiersz macierzy **U** ($j \geqslant k$)

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{kp} u_{pj} \quad j = k, k+1, \ldots, n$$

  2. Wyznaczamy k-tą kolumnę macierzy **L** ($i > k$)

$$\ell_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{ip} u_{pk} \right) / u_{kk} \quad i = k+1, \ldots, n$$

- Problemy: $u_{kk} = 0$ lub $|u_{kk}| \sim 0$ (np. „śmieci numeryczne")
- Wybór elementu głównego:
  1 wyznaczamy k-ty wiersz macierzy **U**
  1a przed wyznaczeniem k-tej kolumny macierzy **L** szukamy w k-tym wierszu macierzy **U** elementu o maksymalnej wartości bezwzględnej, tzn.

$$\max_{j=k,\ldots,n} |u_{kj}| \Rightarrow u_{kj_{\max}}$$

  1b zamieniamy w macierzy **U** kolumny k i $j_{\max}$ (także w **A**)
  2 wyznaczamy k-tą kolumnę macierzy **L**

Częściowy wybór elementu głównego - metoda Doolittle'a

- Uzyskujemy rozkład $\mathbf{A}' = \mathbf{LU}$, gdzie $\mathbf{A}'$ jest macierzą $\mathbf{A}$, w której poprzestawialiśmy kolumny, a macierze $\mathbf{L}$ oraz $\mathbf{U}$ są odpowiednimi macierzami trójkątnymi
- Macierz $\mathbf{A}'$ można przedstawić jako $\mathbf{A}' = \mathbf{AP}^{Tr}$, gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą permutacji (jest to macierz ortogonalna, czyli $\mathbf{P}^{Tr} = \mathbf{P}^{-1}$)
- Rozkład macierzy $\mathbf{A}$ przyjmuje wtedy następującą postać

$$\mathbf{AP}^{Tr} = \mathbf{LU} \quad | \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LUP}$$

- Pojedynczą zamianę kolumn i i j w macierzach $\mathbf{U}$ (oraz $\mathbf{A}$) można przedstawić jako iloczyn macierzy $\mathbf{UP}^{ij}$ (oraz $\mathbf{AP}^{ij}$), gdzie macierz $\mathbf{P}^{ij}$ jest macierzą jednostkową $n \times n$, w której zamieniono kolumny i z j
- W każdym kroku $k = 1, \ldots, n-1$ metody Doolittle'a dokonujemy (co najwyżej) pojedynczej zamiany kolumn w macierzy $\mathbf{U}$ (oraz $\mathbf{A}$), dlatego końcowy wynik możemy przedstawić w następujący sposób (zob. Dodatek)

$$\mathbf{LUP} = \mathbf{LUP}_{n-1}\mathbf{P}_{n-2}...\mathbf{P}_k...\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1,$$

gdzie $\mathbf{P}_k$ jest macierzą pojedynczej zamiany kolumn wykonanej w k-tym kroku metody Doolittle'a [1]

[1] Macierz permutacji $\mathbf{P}$ można uzyskać zamieniając w kolejnych krokach odpowiednie wiersze macierzy, która na starcie byłą macierzą jednostkową. Zagadnienie to można jeszcze bardziej zoptymalizować reprezentując macierz $\mathbf{P}$ przez listę permutowanych indeksów...

Częściowy wybór elementu głównego - metoda Crouta

- k-ty krok metody Crouta
  1. Wyznaczamy k-tą kolumnę macierzy $\mathbf{L}$ $(i > k)$

$$\ell_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{ip} u_{pk} \quad i = k+1, \ldots, n$$

  2. Wyznaczamy k-ty wiersz macierzy $\mathbf{U}$ $(j \geqslant k)$

$$u_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{kp} u_{pj} \right) / \ell_{kk} \quad j = k, k+1, \ldots, n$$

- Problemy: $\ell_{kk} = 0$ lub $|\ell_{kk}| \sim 0$ (np. „śmieci numeryczne")
- Wybór elementu głównego:

  1 wyznaczamy k-tą kolumnę macierzy $\mathbf{L}$

  1a przed wyznaczeniem k-tego wiersza macierzy $\mathbf{U}$ szukamy w k-tej kolumnie macierzy $\mathbf{L}$ elementu o maksymalnej wartości bezwzględnej, tzn.

$$\max_{i=k,\ldots,n} |\ell_{ik}| \Rightarrow \ell_{i_{\max} k}$$

  1b zamieniamy w macierzy $\mathbf{L}$ wiersze k i $i_{\max}$ (także w $\mathbf{A}$)

  2 wyznaczamy k-ty wiersz macierzy $\mathbf{U}$

Częściowy wybór elementu głównego - metoda Crouta

- Uzyskujemy rozkład $\mathbf{A}' = \mathbf{LU}$, gdzie $\mathbf{A}'$ jest macierzą $\mathbf{A}$, w której poprzestawialiśmy wiersze, a $\mathbf{L}$ oraz $\mathbf{U}$ są odpowiednimi macierzami trójkątnymi
- Macierz $\mathbf{A}'$ można przedstawić jako $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{Tr}\mathbf{A}$, gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą permutacji
- Rozkład macierzy $\mathbf{A}$ przyjmuje wtedy następującą postać

$$\mathbf{P}| \quad \mathbf{P}^{Tr}\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$$

- Pojedynczą zamianę wierszy i i j w macierzy $\mathbf{L}$ (oraz $\mathbf{A}$) można przedstawić jako iloczyn macierzy $\mathbf{P}^{ij}\mathbf{L}$ (oraz $\mathbf{P}^{ij}\mathbf{A}$), gdzie macierz $\mathbf{P}^{ij}$ jest macierzą jednostkową $n \times n$, w której zamieniono wiersze i z j
- W każdym kroku $k = 1, \ldots, n-1$ metody Crouta dokonujemy (co najwyżej) pojedynczej zamiany wierszy w macierzy $\mathbf{L}$ (oraz $\mathbf{A}$, dlatego końcowy wynik możemy przedstawić w następujący sposób

$$\mathbf{PLU} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_k \ldots \mathbf{P}_{n-2}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{LU},$$

gdzie $\mathbf{P}_k$ jest macierzą pojedynczej zamiany wierszy wykonanej w k-tym kroku metody Crouta [2]

---

[2] Macierz permutacji $\mathbf{P}$ można uzyskać zamieniając w kolejnych krokach odpowiednie kolumny macierzy, która na starcie była macierzą jednostkową.

Do zrobienia - modyfikacja programu na rozkład LU macierzy

1. Wczytać z wejścia wymiar n macierzy $\mathbf{A}$ i elementy tej macierzy
2. Dokonać rozkładu LU macierzy $\mathbf{A}$ metodą Doolittle'a (albo Crouta) z częściowym wyborem elementu głównego
3. Wypisać na wyjściu macierze trójkątne $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ oraz macierz permutacji $\mathbf{P}$
4. Sprawdzić, czy $\mathbf{A} = \mathbf{LUP}$ (albo $\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$)
5. Porównać wyniki programu z wynikami z gotowych procedur (np. „lu" Matlaba)

Macierze do testowania

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 770 & 0 & 50666 \\ 0 & 770 & 0 & 50666 & 0 \\ 770 & 0 & 50666 & 0 & 3956810 \\ 0 & 50666 & 0 & 3956810 & 0 \\ 50666 & 0 & 3956810 & 0 & 335462666 \end{pmatrix}$$

(zob. `http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/inp`)

Dodatek: Delta Kroneckera i macierz jednostkowa

- Delta Kroneckera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- Macierz jednostkowa, przykład o rozmiarze 4×4

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Elementy macierzy jednostkowej można przedstawić jako delty Kroneckera

$$(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$$

Dodatek: Pojedyncza zamiana **kolumn** w macierzy

Rozważmy zamianę kolumn i oraz j w macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ o wymiarach $n \times n$. Wynikiem takiej zamiany jest macierz $\mathbf{A}^{(ij)}$, której elementy mają postać

$$a_{k\ell}^{(ij)} = \begin{cases} a_{k\ell}, & \ell \neq i, j \\ a_{ki}, & \ell = j \\ a_{kj}, & \ell = i \end{cases} \tag{1}$$

Pokażemy, że macierz z zamienionymi kolumnami $\mathbf{A}^{(ij)}$ można przedstawić jako następujący iloczyn macierzy

$$\mathbf{A}^{(ij)} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{ij}, \tag{2}$$

Porównując wzór na elementy macierzy $\mathbf{A}^{(ij)}$ wynikające z postaci (2)

$$a_{k\ell}^{(ij)} = \sum_{m=1}^{n} a_{km} p_{m\ell}^{ij} \tag{3}$$

z elementami $a_{k\ell}^{(ij)}$ zdefiniowane w (1) widać, że elementy macierzy $\mathbf{P}^{ij}$ są równe

$$p_{m\ell}^{ij} = \begin{cases} \delta_{m\ell}, & \ell \neq i, j \\ \delta_{mi}, & \ell = j \\ \delta_{mj}, & \ell = i \end{cases} \tag{4}$$

Czyli $\mathbf{P}^{ij}$ jest macierzą jednostkową $\mathbf{1}$, w której zamieniono kolumny i oraz j.

Dodatek: Macierz reprezentująca pojedynczą zamianę **kolumn**

- Przykład $\mathbf{P}^{24}$ o rozmiarze 4×4 - zamieniamy kolumny 2 oraz 4 w macierzy $\mathbf{1}$

$$\mathbf{P}^{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sprawdzamy czy $\mathbf{AP}^{24} = \mathbf{A}^{(24)}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} & a_{32} \\ a_{41} & a_{44} & a_{43} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

- Taką samą macierz $\mathbf{P}^{24}$ uzyskamy zamieniając w macierzy jednostkowej wiersze 2 oraz 4

$$\mathbf{P}^{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Macierze $\mathbf{P}^{ij}$ są ortogonalne i symetryczne tzn., że $(\mathbf{P}^{ij})^{-1} = (\mathbf{P}^{ij})^{Tr} = \mathbf{P}^{ij}$, a w szczególności $(\mathbf{P}^{ij})^2 = \mathbf{1}$, co się wiąże z tym, że jeżeli dwa razy zamienimy te same kolumny, to wrócimy do punktu wyjścia.

Dygresja: Pojedyncza zamiana **wierszy** w macierzy

Rozważmy zamianę wierszy i oraz j w macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ o wymiarach $n \times n$. Wynikiem takiej zamiany jest macierz $\mathbf{A}^{[ij]}$, której elementy mają postać

$$a_{k\ell}^{[ij]} = \begin{cases} a_{k\ell}, & k \neq i, j \\ a_{i\ell}, & k = j \\ a_{j\ell}, & k = i \end{cases} \tag{5}$$

Pokażemy, że macierz z zamienionymi wierszami $\mathbf{A}^{[ij]}$ można przedstawić jako następujący iloczyn macierzy

$$\mathbf{A}^{[ij]} = \mathbf{P}^{ij}\mathbf{A}, \tag{6}$$

Porównując wzór na elementy macierzy $\mathbf{A}^{[ij]}$ wynikające z postaci (6)

$$a_{k\ell}^{[ij]} = \sum_{m=1}^{n} p_{km}^{ij} a_{m\ell} \tag{7}$$

z elementami $a_{k\ell}^{[ij]}$ zdefiniowane w (5) widać, że elementy macierzy $\mathbf{P}^{ij}$ są równe

$$p_{km}^{ij} = \begin{cases} \delta_{km}, & k \neq i, j \\ \delta_{im}, & k = j \\ \delta_{jm}, & k = i \end{cases} \tag{8}$$

Czyli $\mathbf{P}^{ij}$ jest macierzą jednostkową $\mathbf{1}$, w której zamieniono wiersze i oraz j.

Dodatek: Sekwencja zamian **kolumn** w macierzy

1. W macierzy $\mathbf{A}$ zamieniono kolumny i_1 oraz j_1

$$\mathbf{A}^{(i_1 j_1)} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{i_1 j_1}$$

2. W macierzy $\mathbf{A}^{(i_1 j_1)}$ zamieniono kolumny kolumny i_2 oraz j_2

$$\left[\mathbf{A}^{(i_1 j_1)}\right]^{(i_2 j_2)} = \mathbf{A}^{(i_1 j_1)}\mathbf{P}^{i_2 j_2} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{i_1 j_1}\mathbf{P}^{i_2 j_2}$$

3. W macierzy $\mathbf{A}^{(i_2 j_2)}$ zamieniono kolumny kolumny i_3 oraz j_3

$$\left[\mathbf{A}^{(i_2 j_2)}\right]^{(i_3 j_3)} = \mathbf{A}^{(i_2 j_2)}\mathbf{P}^{i_3 j_3} = \mathbf{A}^{(i_1 j_1)}\mathbf{P}^{i_2 j_2}\mathbf{P}^{i_3 j_3} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{i_1 j_1}\mathbf{P}^{i_2 j_2}\mathbf{P}^{i_3 j_3}$$

4. Widać, że możemy zareprezentować permutację kolumn wynikającą z powyższej sekwencji pojedynczych zamian jako iloczyn macierzy reprezentujących te zamiany:

$$\mathbf{P}^{i_1 j_1}\mathbf{P}^{i_2 j_2}\mathbf{P}^{i_3 j_3}$$

5. itd

Dodatek: Permutacja **kolumn** w metodzie Doolittle'a z częściowym wyborem elementu głównego

- Macierz $\mathbf{A}' = \mathbf{LU}$ jest zmodyfikowaną macierzą wejściową $\mathbf{A}$, w której pozamieniano kolumny w wyniku częściowego wyboru elementu głównego w metodzie Doolittle'a
- Wobec powyższych rozważań widać, że macierz $\mathbf{A}'$ można przedstawić jako

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_{n-1},$$

  gdzie w k-tym kroku może nastąpić zamiana kolumn k oraz j_k reprezentowana macierzą $\mathbf{P}_k \equiv \mathbf{P}^{kj_k}$
- Wyprowadzamy postać rozkładu, korzystamy z $\mathbf{P}_k = (\mathbf{P}_k)^{Tr} = (\mathbf{P}_k)^{-1}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}' = \mathbf{LU} && | \cdot \mathbf{P}_{n-1} \\
&\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_{n-2} = \mathbf{LU}\mathbf{P}_{n-1} && | \cdot \mathbf{P}_{n-2} \\
&\quad\vdots \\
&\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_k = \mathbf{LU}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_{n-2} \dots \mathbf{P}_{k+1} && | \cdot \mathbf{P}_k \\
&\quad\vdots \\
&\mathbf{A}\mathbf{P}_1 = \mathbf{LU}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_{n-2} \dots \mathbf{P}_k \dots \mathbf{P}_2 && | \cdot \mathbf{P}_1 \\
&\mathbf{A} = \mathbf{LU}\underbrace{\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_{n-2} \dots \mathbf{P}_k \dots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1}_{\mathbf{P}}
\end{aligned}$$

Dodatek: Konstrukcja macierzy permutacji w metodzie Doolittle'a z częściowym wyborem elementu głównego

- Rozkład LU metodą Doolitle'a ma postać $\mathbf{A} = \mathbf{LUP}$, gdzie macierz permutacji jest iloczynem macierzy reprezentujących pojedyncze zamiany kolumn przy częściowym wyborze elementu głównego

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_{n-2}\ldots\mathbf{P}_k\ldots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$$

- Zwróćmy uwagę, że odwrócona kolejność wymnażania macierzy prowadzi do kolejnych zamian wierszy w poprzedniej macierzy (zob. wzór (6)), czyli startujemy z macierzy $\mathbf{1}$, w której w kolejnych krokach zamieniamy odpowiednie wiersze, tzn. w k-tym kroku metody Doolittle'a z częściowym wyborem elementu głównego

$$\mathbf{P}_k\left(\mathbf{P}_{k-1}\ldots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{1}\right),$$

  gdzie $\mathbf{P}_k \equiv \mathbf{P}^{kj_k}$, czyli w macierzy $\mathbf{P}_{k-1}\ldots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{1}$ zamieniamy wiersze k oraz j_k