Zad. 14. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

e-mail: andrzej.kedziorski@fizyka.umk.pl
tel.: 56611-3274
pokój: 485
http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/

Zadanie 14

Napisać program rozwiązujący równania różniczkowe zwyczajne $y'(t) = f(t, y(t))$ wybranymi trzema metodami. Ocenić dokładność tych metod.

Równania różniczkowe zwyczajne

- Równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \quad y(t_0) = y_0, \ \frac{d}{dt}y(t_0) = Dy_0$$

daje się zapisać jako układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = g(t) \\ \frac{d}{dt}g(t) = f(t,g) \end{cases}$$

- itd

Oznaczenia

- Standardowo
$$\frac{dy}{dt} \equiv y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} \equiv y''$$
- Często obliczenia wykonujemy na dyskretnej siatce równoodległych punktów
$$\{t_0, t_1, ..., t_i, ..., t_n\},$$
gdzie
$$h = t_{k+1} - t_k$$
jest stałym krokiem
- W metodach z adaptowanym krokiem siłą rzeczy operujemy nierównoodległymi punktami, tzn.
$$h_k = t_{k+1} - t_k$$
- Wartości funkcji na siatce będziemy oznaczać jako
$$y(t_k) \equiv y_k$$

Metody jednokrokowe - metoda Eulera

- Chcemy rozwiązać równanie
$$y'(t) = f(t, y)$$
- Rozwijamy $y(t)$ w szereg Taylora wokół t
$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + \frac{1}{2}y''h^2 + \dots$$
- Metoda Eulera
$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h_k$$
- Błąd metody (jednego kroku) szacujemy przez kolejny wyraz rozwinięcia $\frac{1}{2}y_k''h_k^2$
- Wersja z adaptowanym krokiem: chcemy, żeby
$$\frac{1}{2}|y_k''|h_k^2 \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h_k \leqslant \sqrt{\frac{2\varepsilon}{|y_k''|}}$$

  Drugą pochodną możemy oszacować następująco
$$y_k'' = \frac{y_k' - y_{k-1}'}{t_k - t_{k-1}} = \frac{f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h_{k-1}}$$

  Co zrobić, gdy $y'' \sim 0$?

Poprawiamy dokładność

- Chcemy rozwiązać równanie
$$y'(t) = f(t, y)$$
- Rozwijamy $y(t)$ w szereg Taylora wokół t
$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + \frac{1}{2}y''(t)h^2 + \dots$$
- Chcemy uwzględnić wyraz $\sim h^2$, oszacujmy drugą pochodną
$$y''(t) = \frac{d}{dt}f(t, y(t)) = \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}y'(t) = \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}f(t,y)$$
- Rozwijamy $f(t, y)$ w szereg Taylora wokół (t, y); zauważmy, że $dy = fdt$
$$f(t+h, y+fh) = f(t,y) + \frac{\partial f}{\partial t}h + \frac{\partial f}{\partial y}f(t,y)h + \dots,$$
Stąd
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \approx \frac{f(t+h, y+f(t,y)h) - f(t,h)}{h}$$

Metoda jednokrokowa - RK2

- Przepisujemy rozwinięcie $y(t)$ w szereg Taylora wokół t_k

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h_k + \frac{h_k^2}{2} \frac{f(t_k + h_k, y_k + f(t_k, y_k)h_k) - f(t_k, y_k)}{h_k}$$

- Porządkujemy wyrazy

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

gdzie

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k)h_k \\ k_2 &= f(t_k + h_k, y_k + k_1)h_k \end{aligned}$$

- Jest to metoda Rungego-Kutty drugiego rzędu
- Daje się stosować na siatce nierównoodległych punktów
- Trudno oszacować błąd metody $\Rightarrow$ ewentualne realizacje metody z adaptowanym krokiem stosuje się szacując błąd w oparciu o metodę RK wyższego rzędu (zazwyczaj RK45)

Klasyk - RK4

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k)h_k \\
k_2 &= f(t_k + \frac{1}{2}h_k, y_k + \frac{1}{2}k_1)h_k \\
k_3 &= f(t_k + \frac{1}{2}h_k, y_k + \frac{1}{2}k_2)h_k \\
k_4 &= f(t_k + h_k, y_k + k_3)h_k
\end{aligned}
$$

$$
y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
$$

RK4 - wersja „rozrzutna” Fehlberga (równanie I rzędu w 1D)

Chcemy rozwiązać równanie

$$y'(t) = f(t, y)$$

Wzory dla RK4 w wersji Fehlberga

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k)h_k \\
k_2 &= f\left(t_k + \tfrac{1}{4}h_k, y_k + \tfrac{1}{4}k_1\right)h_k \\
k_3 &= f\left(t_k + \tfrac{3}{8}h_k, y_k + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2\right)h_k \\
k_4 &= f\left(t_k + \tfrac{12}{13}h_k, y_k + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3\right)h_k \\
k_5 &= f\left(t_k + h_k, y_k + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4\right)h_k
\end{aligned}$$

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{25}{216}k_1 + \tfrac{1408}{2565}k_3 + \tfrac{2197}{4104}k_4 - \tfrac{1}{5}k_5$$

Po co tak komplikować?

RK5 Fehlberga (równanie I rzędu w 1D)

Wystarczy doliczyć jeden wyraz

$$k_6 = f(t_k + \tfrac{1}{2}h_k, y_k - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5)h_k$$

by otrzymać RK5

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{16}{135}k_1 + \tfrac{6656}{12825}k_3 + \tfrac{28561}{56430}k_4 - \tfrac{9}{50}k_5 + \tfrac{2}{55}k_6,$$

gdzie k_i, $i = 1, \ldots, 5$ wzięte z RK4 w wersji Fehlberga.

RK5 może posłużyć do oszacowania błędu metody RK4, a w konsekwencji, do dobrania odpowiedniego kroku czasowego

$$\Downarrow$$

Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga RKF4(5)

Metoda RKF4(5)[1]

0. Definiujemy wszystkie współczynniki (stałe, warunki początkowe) i zadajemy wartości graniczne dla błędu $(\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max})$ i kroku czasowego (h_{min}, h_{max})
1. Uruchamiamy procedurę RKF45 obliczając $y^{(4)}$ i $y^{(5)}$.
   Obliczamy $\varepsilon = |y^{(4)} - y^{(5)}|$
2. Jeżeli $\varepsilon_{min} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_{max}$, krok h pozostaje bez zmian $\rightarrow$ wykonujemy następny krok obliczeń
3. Jeżeli $\varepsilon < \varepsilon_{min}$: $h \rightarrow 2h$
   Jeżeli $\varepsilon > \varepsilon_{max}$: $h \rightarrow h/2$
4. Przy warunku, że $h_{min} \leqslant h \leqslant h_{max}$ wykonywany jest następny krok

Metoda płynnie adaptująca krok (np. $s \in [0.1, 0.95]$?)

$$h_{nowy} = h_{poprzedni} \frac{s}{\varepsilon^{1/5}}$$

[1] Na podstawie notatek J. Matulewskiego

Do zrobienia

Rozwiązać równania różniczkowe na przedziale $t \in [0, 10]$ z warunkiem $y(0) = 1$

1. $y'(t) = y(t)$, tzn. $f(t, y) = y$
2. $y'(t) = -y(t)$, tzn. $f(t, y) = -y$
3. $y'(t) = -y(t) + t$, tzn. $f(t, y) = -y + t$

- Rozwiązaniem jest zbiór punktów $\{(t_k, y_k)\}$
- Obliczenia wykonać w pojedynczej precyzji
- Sprawdzić jak zmienia się dokładność metod (o stałym kroku) np. Eulera, RK2, RK4 jeżeli dla co raz to mniejszego kroku, np. $h = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$; czy dokładność[2] metod cały czas się poprawia wraz ze zmniejszaniem h?
- Jak zachowują się błędy (narastają, są stałe, maleją) wraz z kolejnymi krokami dla powyższych równań?
- Analityczne rozwiązania powyższych równań przy warunku początkowym $y(0) = y_0$
  1. $y(t) = y_0 e^t$
  2. $y(t) = y_0 e^{-t}$
  3. $y(t) = t - 1 + (y_0 + 1)y_0 e^{-t}$

---

[2] dokładność zdefiniujemy jako największy (co do wartości bezwzględnej) błąd wyznaczenia y