Zad. 12. Inne metody aproksymacji funkcji - na podstawie rozkładu Fouriera i rozkładu falkowego.

e-mail: andrzej.kedziorski@fizyka.umk.pl
tel.: 56611-3274
pokój: 485
http://www.fizyka.umk.pl/~tecumseh/EDU/MNII/

Zadanie 12 (Matlab, Octave, Python,...)

1. Napisz algorytm aproksymacji funkcji

   `f(x)=abs(mod(x,4)-2)-1`

   na dyskretnym zbiorze wezłów dla $x \in [0, 2\pi]$ za pomocą szeregu Fouriera. W sposób graficzny zbadaj zależność jakości aproksymacji (w tym efekt Gibbsa) od stopnia m szukanego aproksymującego wielomianu trygonometrycznego.
2. Za pomocą transformacji falkowej Haara aproksymuj funkcję `f(x)`. W sposób graficzny zbadaj zależność jakości aproksymacji dla uśrednionego podsygnału a_m od poziomu m transformacji falkowej.
3. Porównaj jakość aproksymacji funkcji dla tych dwóch metod
4. Zamień funkcję `f(x)` sygnałem dźwiękowym (wg generatora lub pliku/plików `.wav`) i skompresuj go. Oceń stopień kompresji i jakość dźwięku

Aproksymacja trygonometryczna

Mamy zadaną funkcję $f(x_i) \equiv f_i$ na siatce równoodległych punktów $x_i \in [0, 2\pi)$, $L \in \mathbb{N}$

1° $N = 2L$
$\forall_{i=0,1,\dots,2L-1}\ x_i = \frac{\pi i}{L}$
$m = \frac{n-2}{2}$
$\delta = 1$

2° $N = 2L+1$
$\forall_{i=0,1,\dots,2L}\ x_i = \frac{2\pi i}{2L+1}$
$m = \frac{n-1}{2}$
$\delta = 0$

Wielomian trygonometryczny stopnia $n \leqslant N$ taki, że $\|F - f\|^2 = \min$

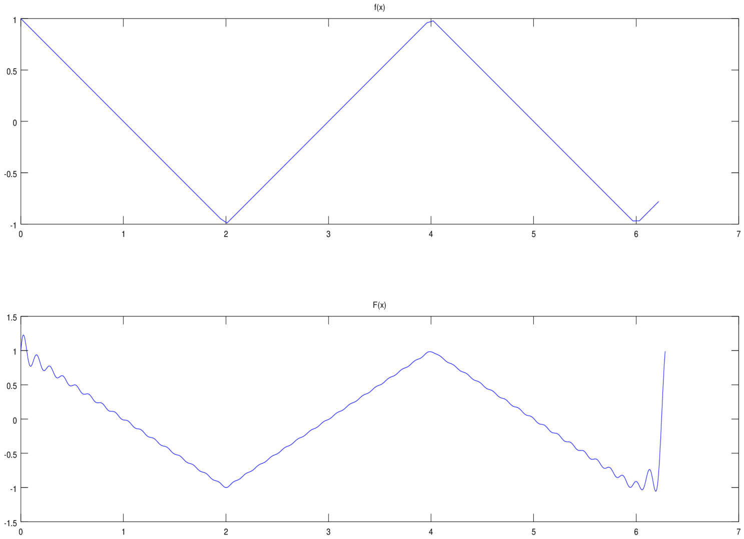
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] + \frac{\delta}{2} a_{m+1} \cos[(m+1)x]$$

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \cos(kx_i), \ \ k = 0, 1, \dots, m+1$$

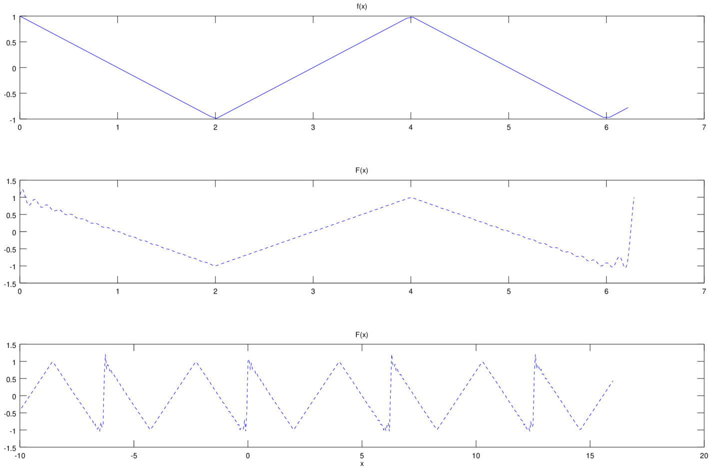
$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \sin(kx_i), \ \ k = 1, \dots, m$$

zob. A. Woike, Zaawansowane metody numeryczne, Wykład 7, Aproksymacja trygonometryczna, przybliżenie Padé

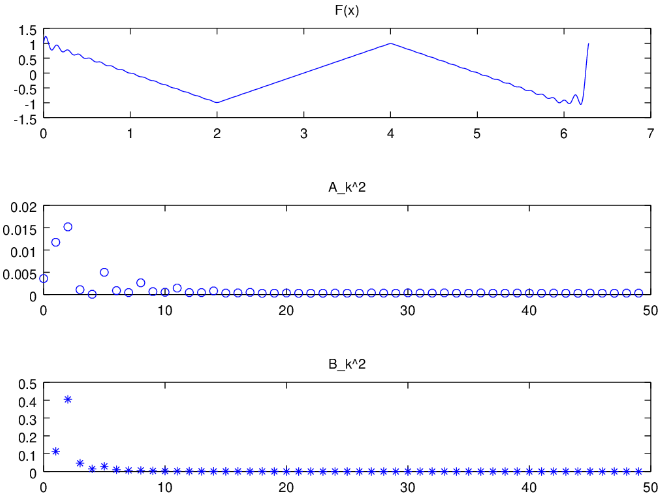
Funkcja $f(x)$ i wielomian trygonometryczny $F(x)$



Co jest okresem $F(x)$?



Widmo $f(x)$?


F(x)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
A_k^2
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0
10
20
30
40
50
B_k^2
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
50

k

Transformacja Haara $\mathbf{H}_1$

- $g(t)$ jest sygnałem analogowym. Sygnał cyfrowy:

$$\mathbf{f} \Leftrightarrow \; f_i = g(t_i), \; i = 1, 2, \ldots, N, \; t_{i+1} - t_i = \text{const}$$

  Dodatkowo załóżmy, że $N = 2^L$, gdzie $L \in \mathbb{N}$

- Pierwszy trend (podsygnał): $\mathbf{a}^1$

$$a_m = \frac{f_{2m-1} + f_{2m}}{\sqrt{2}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, N/2$$

- Pierwsza fluktuacja (podsygnał): $\mathbf{d}^1$

$$d_m = \frac{f_{2m-1} - f_{2m}}{\sqrt{2}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, N/2$$

- Transformacja Haara, poziom 1: $\mathbf{H}_1$

$$\mathbf{f} \rightarrow (\mathbf{a}^1 | \mathbf{d}^1)$$

J. S. Walker, *A Primer on Wavelets and their Scientific Applications*, CRC Press LLC, Boca Raton, FL, USA, 1999.

Transformacje Haara $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_3$, ...

- $\mathbf{H}_2$: $\mathbf{f} \to (\mathbf{a}^2|\mathbf{d}^2|\mathbf{d}^1)$, gdzie

$$a_m^2 = \frac{a_{2m-1}^1 + a_{2m}^1}{\sqrt{2}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, N/4$$

$$d_m^2 = \frac{a_{2m-1}^1 - a_{2m}^1}{\sqrt{2}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, N/4$$

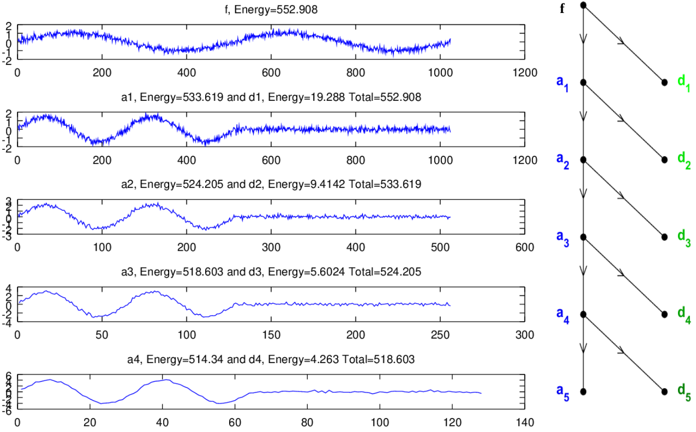
- $\mathbf{H}_3$: $\mathbf{f} \to (\mathbf{a}^3|\mathbf{d}^3|\mathbf{d}^2|\mathbf{d}^1)$, gdzie

$$a_m^3 = \frac{a_{2m-1}^2 + a_{2m}^2}{\sqrt{2}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, N/8$$

$$d_m^3 = \frac{a_{2m-1}^2 - a_{2m}^2}{\sqrt{2}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, N/8$$

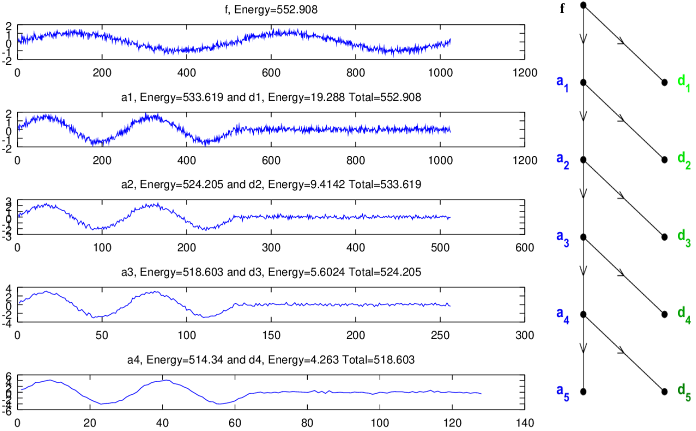
- ...

Transformacja Haara - „zaszumiony sinus” $\Rightarrow$ odszumianie, kompresja



Na osi poziomej - liczba próbek

Transformacja Haara - „zaszumiony sinus” $\Rightarrow$ odszumianie, kompresja



Energia: $E_f = \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = \sum_{i=1}^{N} [(a_i^1)^2 + (d_i^1)^2] \leqslant \sum_{i=1}^{N} (a_i^1)^2 =$
$\sum_{i=1}^{N} [(a_i^2)^2 + (d_i^2)^2] \leqslant \sum_{i=1}^{N} (a_i^2)^2 = \ldots$

„Falki" Haara $\mathbf{H}_1$

$$\mathbf{W}^1_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)_{1\times N}$$

$$\mathbf{W}^1_2 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)_{1\times N}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{W}^1_{N/2} = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{1\times N}$$

Zauważmy, że dla $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ mamy

$$d^1_m = \frac{f_{2m-1} - f_{2m}}{\sqrt{2}} = \mathbf{W}^1_m \cdot \mathbf{f} \quad m = 1, \dots, N/2$$

$$(\mathbf{d}^1)^{Tr} = (\mathbf{W}^1_1 \cdot \mathbf{f}, \dots, \mathbf{W}^1_{N/2} \cdot \mathbf{f})^{Tr} = \mathbf{W}^1 \, \mathbf{f}^{Tr}$$

Macierz $\mathbf{W}^1$ o wymiarach $\frac{N}{2} \times N$ ma w m-tym wierszu $\mathbf{W}^1_m$

„Funkcje” skalujące Haara $\mathbf{H}_1$

$$\mathbf{V}_1^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\right)_{1\times N}$$

$$\mathbf{V}_2^1 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\right)_{1\times N}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{V}_{N/2}^1 = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{1\times N}$$

Zauważmy, że dla $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N)$ mamy

$$a_m^1 = \frac{f_{2m-1} + f_{2m}}{\sqrt{2}} = \mathbf{V}_m^1 \cdot \mathbf{f} \quad m = 1, \ldots, N/2$$

$$(\mathbf{a}^1)^{Tr} = (\mathbf{V}_1^1 \cdot \mathbf{f}, \ldots, \mathbf{V}_{N/2}^1 \cdot \mathbf{f})^{Tr} = \mathbf{V}^1\, \mathbf{f}^{Tr}$$

Macierz $\mathbf{V}^1$ o wymiarach $\frac{N}{2} \times N$ ma w m-tym wierszu $\mathbf{V}_m^1$

„Falki” Haara $\mathbf{H}_2$

$$\mathbf{W}^2_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)_{1\times N}$$

$$\mathbf{W}^2_2 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)_{1\times N}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{W}^2_{N/4} = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_{1\times N}$$

Zauważmy, że dla $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N)$ mamy

$$d^2_m = \frac{a^1_{2m-1} - a^1_{2m}}{\sqrt{2}} = \mathbf{W}^2_m \cdot \mathbf{f} \quad m = 1, \ldots, N/4$$

$$(\mathbf{d}^2)^{Tr} = (\mathbf{W}^2_1 \cdot \mathbf{f}, \ldots, \mathbf{W}^2_{N/4} \cdot \mathbf{f})^{Tr} = \mathbf{W}^2\, \mathbf{f}^{Tr}$$

Macierz $\mathbf{W}^2$ o wymiarach $\frac{N}{4} \times N$ ma w m-tym wierszu $\mathbf{W}^2_m$

„Funkcje” skalujące Haara $\mathbf{H}_2$

$$\mathbf{V}_1^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)_{1\times N}$$

$$\mathbf{V}_2^2 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)_{1\times N}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{V}_{N/4}^2 = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{1\times N}$$

Zauważmy, że dla $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N)$ mamy

$$a_m^2 = \frac{a_{2m-1}^1 + a_{2m}^1}{\sqrt{2}} = \mathbf{V}_m^2 \cdot \mathbf{f} \quad m = 1, \ldots, N/4$$

$$(\mathbf{a}^2)^{Tr} = (\mathbf{V}_1^2 \cdot \mathbf{f}, \ldots, \mathbf{V}_{N/4}^2 \cdot \mathbf{f})^{Tr} = \mathbf{V}^2\, \mathbf{f}^{Tr}$$

Macierz $\mathbf{V}^2$ o wymiarach $\frac{N}{4} \times N$ ma w m-tym wierszu $\mathbf{V}_m^2$

„Falki” Haara $\mathbf{H}_3$

$$\mathbf{W}_1^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,0,\dots,0)_{1\times N}$$

$$\mathbf{W}_2^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,0,\dots,0)_{1\times N}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{W}_{N/8}^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,\dots,0,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)_{1\times N}$$

Zauważmy, że dla $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_N)$ mamy

$$d_m^3 = \frac{a_{2m-1}^2 - a_{2m}^2}{\sqrt{2}} = \mathbf{W}_m^3 \cdot \mathbf{f} \quad m = 1,\dots,N/8$$

$$(\mathbf{d}^3)^{Tr} = (\mathbf{W}_1^3 \cdot \mathbf{f},\dots,\mathbf{W}_{N/8}^3 \cdot \mathbf{f})^{Tr} = \mathbf{W}^3\,\mathbf{f}^{Tr}$$

Macierz $\mathbf{W}^3$ o wymiarach $\frac{N}{8} \times N$ ma w m-tym wierszu $\mathbf{W}_m^3$

„Funkcje” skalujące Haara $\mathbf{H}_3$

$$\mathbf{V}_1^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1,0,\ldots,0)_{1\times N}$$

$$\mathbf{V}_2^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,\ldots,0)_{1\times N}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{V}_{N/8}^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,\ldots,0,1,1,1,1,1,1,1,1)_{1\times N}$$

Zauważmy, że dla $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_N)$ mamy

$$a_m^3 = \frac{a_{2m-1}^2 + a_{2m}^2}{\sqrt{2}} = \mathbf{V}_m^3 \cdot \mathbf{f} \quad m = 1,\ldots,N/8$$

$$(\mathbf{a}^3)^{Tr} = (\mathbf{V}_1^3 \cdot \mathbf{f},\ldots,\mathbf{V}_{N/8}^3 \cdot \mathbf{f})^{Tr} = \mathbf{V}^3\,\mathbf{f}^{Tr}$$

Macierz $\mathbf{V}^3$ o wymiarach $\frac{N}{8} \times N$ ma w m-tym wierszu $\mathbf{V}_m^3$

„Falki" Haara $\mathbf{H}_k$, $k \geqslant 1$

$$\mathbf{W}_1^k = \frac{1}{2^{k/2}}\Big(\overbrace{1,\ldots,1}^{2^{k-1}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{2^{k-1}},0,\ldots,0\Big)_{1\times N}$$

$$\mathbf{W}_2^k = \frac{1}{2^{k/2}}\Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{2^k},\overbrace{1,\ldots,1}^{2^{k-1}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{2^{k-1}},0,\ldots,0\Big)_{1\times N}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{W}_{N/2^k}^k = \frac{1}{2^{k/2}}\Big(0,\ldots,0,\overbrace{1,\ldots,1}^{2^{k-1}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{2^{k-1}}\Big)_{1\times N}$$

$$(\mathbf{d}^k)^{Tr} = (\mathbf{W}_1^k\cdot\mathbf{f},\ldots,\mathbf{W}_{N/2^k}^k\cdot\mathbf{f})^{Tr} = \mathbf{W}^k\,\mathbf{f}^{Tr}$$

Macierz $\mathbf{W}^k$ o wymiarach $\frac{N}{2^k}\times N$ ma w m-tym wierszu $\mathbf{W}_m^k$

„Funkcje” skalujące Haara $\mathbf{H}_k$

$$\mathbf{V}_1^k = \frac{1}{2^{k/2}}\Big(\overbrace{1,\ldots,1}^{2^k},0,\ldots,0\Big)_{1\times N}$$

$$\mathbf{V}_2^k = \frac{1}{2^{k/2}}\Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{2^k},\overbrace{1,\ldots,1}^{2^k},0,\ldots,0\Big)_{1\times N}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{V}_{N/2^k}^k = \frac{1}{2^{k/2}}\Big(0,\ldots,0,\overbrace{1,\ldots,1}^{2^k}\Big)_{1\times N}$$

$$(\mathbf{a}^k)^{Tr} = (\mathbf{V}_1^k\cdot\mathbf{f},\ldots,\mathbf{V}_{N/2^k}^k\cdot\mathbf{f})^{Tr} = \mathbf{V}^k\,\mathbf{f}^{Tr}$$

Macierz $\mathbf{V}^k$ o wymiarach $\frac{N}{2^k}\times N$ ma w m-tym wierszu $\mathbf{V}_m^k$

Rekonstrukcja sygnału

- $\mathbf{H}_1$: $\mathbf{f} \to (\mathbf{a}^1|\mathbf{d}^1)$
- Uśredniony sygnał $\mathbf{A}^1$

$$\mathbf{A}^1 = a_1\,\mathbf{V}_1^1 + a_2\,\mathbf{V}_2^1 + \ldots + a_{N/2}\,\mathbf{V}_{N/2}^1 = \sum_{i=1}^{N/2} a_i\,\mathbf{V}_i^1 = \sum_{i=1}^{N/2} (\mathbf{V}_i^1 \cdot \mathbf{f})\,\mathbf{V}_i^1$$

- Detale sygnału $\mathbf{D}^1$

$$\mathbf{D}^1 = d_1\,\mathbf{W}_1^1 + d_2\,\mathbf{W}_2^1 + \ldots + d_{N/2}\,\mathbf{W}_{N/2}^1 = \sum_{i=1}^{N/2} d_i\,\mathbf{W}_i^1 = \sum_{i=1}^{N/2} (\mathbf{W}_i^1 \cdot \mathbf{f})\,\mathbf{W}_i^1$$

- Zrekonstruowany sygnał

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^1 + \mathbf{D}^1$$

Rekonstrukcja sygnału

- $\mathbf{H}_2$: $\mathbf{f} \to (\mathbf{a}^2|\mathbf{d}^2|\mathbf{d}^1)$
- Uśredniony sygnał $\mathbf{A}^2$

$$\mathbf{A}^2 = a_1^2\,\mathbf{V}_1^2 + a_2^2\,\mathbf{V}_2^2 + \ldots + a_{N/4}^2\,\mathbf{V}_{N/4}^2 = \sum_{i=1}^{N/4} a_i^2\,\mathbf{V}_i^2 = \sum_{i=1}^{N/4}(\mathbf{V}_i^2 \cdot \mathbf{f})\,\mathbf{V}_i^2$$

- Detale sygnału $\mathbf{D}^2$

$$\mathbf{D}^2 = d_1^2\,\mathbf{W}_1^2 + d_2^2\,\mathbf{W}_2^2 + \ldots + d_{N/4}^2\,\mathbf{W}_{N/4}^2 = \sum_{i=1}^{N/4} d_i^2\,\mathbf{W}_i^2 = \sum_{i=1}^{N/4}(\mathbf{W}_i^2 \cdot \mathbf{f})\,\mathbf{W}_i^2$$

- Zrekonstruowany sygnał

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^1$$

$$(\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{D}^2)$$

Rekonstrukcja sygnału

- $\mathbf{H}_k$: $\mathbf{f} \to (\mathbf{a}^k | \mathbf{d}^k | \ldots | \mathbf{d}^1)$
- Uśredniony sygnał $\mathbf{A}^k$

$$\mathbf{A}^k = a_1^k \, \mathbf{V}_1^k + a_2^k \, \mathbf{V}_2^k + \ldots + a_{N/2^k}^k \, \mathbf{V}_{N/2^k}^k = \sum_{i=1}^{N/2^k} a_i^k \, \mathbf{V}_i^k = \sum_{i=1}^{N/2^k} (\mathbf{V}_i^k \cdot \mathbf{f}) \, \mathbf{V}_i^k$$

- Detale sygnału $\mathbf{D}^k$

$$\mathbf{D}^k = d_1^k \, \mathbf{W}_1^k + d_2^k \, \mathbf{W}_2^k + \ldots + d_{N/2^k}^k \, \mathbf{W}_{N/2^k}^k = \sum_{i=1}^{N/2^k} d_i^k \, \mathbf{W}_i^k = \sum_{i=1}^{N/2^k} (\mathbf{W}_i^k \cdot \mathbf{f}) \, \mathbf{W}_i^k$$

- Zrekonstruowany sygnał

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^k + \mathbf{D}^k + \ldots + \mathbf{D}^1$$

Transformacja falkowa Haara - kompresja

1. Wyznaczyć transformację falkową sygnału
2. Położyć zero w wartościach transformacji falkowej, które są mniejsze niż pewna wartość progowa
3. Przechować tylko niezerowe (istotne) wartości transformacji falkowej + informacja o tym, które to wartości
4. Dokonać rekonstrukcji sygnału w oparciu o niezerowe wartości transformacji falkowej

1. Transformacja falkowa

- Niech sygnał $\mathbf{f}$ ma $N = 2^L$ próbek
- Możemy wykonać transformację falkową L-tego poziomu

$$\mathbf{H}_L : \ \mathbf{f} \to (\mathbf{a}^L | \mathbf{d}^L | \mathbf{d}^{L-1} | \ldots | \mathbf{d}^2 | \mathbf{d}^1)$$

- Tablica $\mathbf{H}_L$ zawiera N elementów, czyli tyle samo co sygnał $\mathbf{f}$

2. Wyrzucanie nieistotnych danych

- Ustalenie wartości progowej
  1. Sortujemy wartości transformacji Haara malejąco względem ich wartości bezwzględnej, tzn.
  $$L_1 \geqslant L_2 \geqslant L_3 \geqslant \ldots \geqslant L_N$$
  gdzie $L_i = |a^L|$ albo $L_i = |d_m^k|$, $k = 1, ..., L$, $m = 1, .., N/2^k$
  2. Wyznaczamy energię kumulacyjną
  $$\left(\frac{L_1^2}{E_f}, \frac{L_1^2 + L_2^2}{E_f}, \frac{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}{E_f} \ldots, 1\right)_N$$
  gdzie $E_f = \sum_{i=1}^{N} f_i^2$ to energia sygnału
  3. Wybieramy ile procent energii zostawiamy w skompresowanym sygnale, np. 99.9%
  4. Jeżeli np.
  $$\frac{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \ldots + L_{51}^2}{E_f} \approx 0.999$$
  to wartość L_{51} jest szukaną wartością progową
- Wyrzucamy z $(\mathbf{a}^L|\mathbf{d}^L|\mathbf{d}^{L-1}|\ldots|\mathbf{d}^2|\mathbf{d}^1)$ wartości detali d_m^k o wartości bezwzględnej mniejszej niż ustalony próg
- Pozostałe (istotne) wartości zapisujemy w „skompresowanej" tablica $\tilde{\mathbf{H}}_L$, która może zawierać dużo mniej elementów niż $\mathbf{H}_L$

3. Transmisja istotnych danych

Tworzymy „mapę istotności”, czyli tablicę

$$\mathbf{M} = (m_1, \dots, m_N)_N$$

zawierającą wartości 0 lub 1:

1. $m_i = 1$, gdy na i-tym miejscu w transformacji $(\mathbf{a}^L|\mathbf{d}^L|\mathbf{d}^{L-1}|\dots|\mathbf{d}^2|\mathbf{d}^1)$ mamy wartość większą niż wartość progowa
2. w przeciwnym wypadku $m_i = 0$

Zauważmy, że elementy mapy istotności $\mathbf{M}$ mogą być reprezentowane pojedynczymi bitami...

4. Rekonstrukcja (aproksymacja)

- W oparciu o skompresowaną transformację Haara $\tilde{\mathbf{H}}_L$ i mapę istotności $\mathbf{M}$ zrekonstruować sygnał, który będzie aproksymacją sygnału wejściowego
- Sprawdzić stosunek objętości zajmowanej przez $\tilde{\mathbf{H}}_L$ i $\mathbf{M}$ do objętości zajmowanej przez sygnał $\mathbf{f}$

Dodatek: konstrukcja $\mathbf{V}^2$ i $\mathbf{W}^2$

- $\mathbf{H}_2 : \mathbf{f} \to (\mathbf{a}^2|\mathbf{d}^2|\mathbf{d}^1)$, gdzie $\mathbf{a}^1 \to (\mathbf{a}^2|\mathbf{d}^2)$, czyli jest to transformacja $\mathbf{H}_1$ na sygnale $\mathbf{a}^1$
- Macierz $\mathbf{V}^{1(2)}$ o wymiarach $N/4 \times N/2$ jest "pierwszą ćwiartką" macierzy $\mathbf{V}^1$, tzn.

$$(\mathbf{V}^{1(2)})_{ij} = (\mathbf{V}^1)_{ij} \;\; i = 1, .., N/4, \;\; j = 1, ..., N/2$$

- Trend $\mathbf{a}^2$

$$(\mathbf{a}^2)^{Tr} = \mathbf{V}^{1(2)} \, (\mathbf{a}^1)^{Tr} = \underbrace{\mathbf{V}^{1(2)} \, \mathbf{V}^1}_{\mathbf{V}^2} \, \mathbf{f}^{Tr}$$

- Analogicznie $\mathbf{W}^{1(2)}$ o wymiarach $N/4 \times N/2$ jest "pierwszą ćwiartką" macierzy $\mathbf{W}^1$, tzn.

$$(\mathbf{W}^{1(2)})_{ij} = (\mathbf{W}^1)_{ij}, \;\; i = 1, .., N/4, \;\; j = 1, ..., N/2$$

- Fluktuacje $\mathbf{d}^2$

$$(\mathbf{d}^2)^{Tr} = \mathbf{W}^{1(2)} \, (\mathbf{a}^1)^{Tr} = \underbrace{\mathbf{W}^{1(2)} \, \mathbf{V}^1}_{\mathbf{W}^2} \, \mathbf{f}^{Tr}$$

Dodatek: konstrukcja $\mathbf{V}^2$ i $\mathbf{W}^2$

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}^{1(2)}\,\mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{2}}$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & \ldots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{\frac{N}{2}\times N}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\frac{N}{4}\times N}$$

Dodatek: konstrukcja $\mathbf{V}^2$ i $\mathbf{W}^2$

$$
\mathbf{W}^2 = \mathbf{W}^{1(2)}\,\mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & . & . & . & . & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
0 & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{pmatrix}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{2}}
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & . & . & . & . & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
0 & . & . & . & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{pmatrix}_{\frac{N}{2}\times N}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{pmatrix}_{\frac{N}{4}\times N}
$$

Dodatek: konstrukcja $\mathbf{V}^3$ i $\mathbf{W}^3$

- $\mathbf{H}_3 : \mathbf{f} \to (\mathbf{a}^3|\mathbf{d}^3|\mathbf{d}^2|\mathbf{d}^1)$, gdzie $\mathbf{a}^2 \to (\mathbf{a}^3|\mathbf{d}^3)$, czyli jest to transformacja $\mathbf{H}_1$ na sygnale $\mathbf{a}^2$
- Macierz $\mathbf{V}^{1(3)}$ o wymiarach $N/8 \times N/4$ jest "pierwszą ćwiartką" macierzy $\mathbf{V}^{1(2)}$, tzn.

$$(\mathbf{V}^{1(3)})_{ij} = (\mathbf{V}^{1(2)})_{ij} \;\; i = 1, .., N/8, \;\; j = 1, ..., N/4$$

- Trend $\mathbf{a}^3$

$$(\mathbf{a}^3)^{Tr} = \mathbf{V}^{1(3)} (\mathbf{a}^2)^{Tr} = \underbrace{\mathbf{V}^{1(3)} \mathbf{V}^2}_{\mathbf{V}^3} \mathbf{f}^{Tr}$$

- Analogicznie $\mathbf{W}^{1(3)}$ o wymiarach $N/8 \times N/4$ jest "pierwszą ćwiartką" macierzy $\mathbf{W}^{1(2)}$, tzn.

$$(\mathbf{W}^{1(3)})_{ij} = (\mathbf{W}^{1(2)})_{ij}, \;\; i = 1, .., N/8, \;\; j = 1, ..., N/4$$

- Fluktuacje $\mathbf{d}^3$

$$(\mathbf{d}^3)^{Tr} = \mathbf{W}^{1(3)} (\mathbf{a}^2)^{Tr} = \underbrace{\mathbf{W}^{1(3)} \mathbf{V}^2}_{\mathbf{W}^3} \mathbf{f}^{Tr}$$

Dodatek: konstrukcja $\mathbf{V}^3$ i $\mathbf{W}^3$

$$\mathbf{V}^3 = \mathbf{V}^{1(3)}\,\mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{\frac{N}{8}\times\frac{N}{4}}$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\frac{N}{4}\times N}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{\frac{N}{8}\times N}$$

Dodatek: konstrukcja $\mathbf{V}^3$ i $\mathbf{W}^3$

$$
\mathbf{W}^3 = \mathbf{W}^{1(3)}\,\mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & . & . & . & . & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & . & . & . & . & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
0 & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{pmatrix}_{\frac{N}{8}\times\frac{N}{4}}
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
\frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12
\end{pmatrix}_{\frac{N}{4}\times N}
$$

$$
= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1
\end{pmatrix}_{\frac{N}{8}\times N}
$$