

# Andrzej Raczyński

## Mechanika kwantowa cz. 8

### 1 Zderzenia - ciąg dalszy

#### 1.1 Zderzenia - opis zależny od czasu

Niech hamiltonian układu ma postać  $H = H_0 + V$ , gdzie  $H_0$  jest hamiltonianem swobodnym, a  $V$  jest potencjałem oddziaływania, który może w ogólności zależeć od czasu. W najprostszym przypadku zderzenia potencjalnego  $H_0$  jest operatorem energii kinetycznej. Niech  $\phi_\alpha(t)$  będzie rozwiązaniem swobodnym, tzn. spełnia równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d}{dt} \phi_\alpha(t) = H_0 \phi_\alpha(t). \quad (1)$$

Niech  $\psi_\alpha(t)$  będzie rozwiązaniem pełnego równania Schrödingera

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_\alpha(t) = H \psi_\alpha(t), \quad (2)$$

które w dalekiej przeszłości, gdy paczki falowe zderzających się obiektów były odległe od siebie i praktycznie nie oddziaływały, pokrywało się z rozwiązaniem swobodnym  $\phi_\alpha$ .

Wprowadźmy operatory ewolucji (inaczej propagatory, operatory Greena) pełnej i swobodnej w przód w czasie

$$\begin{aligned} \Theta(t-t')\psi(t) &= iG(t,t')\psi(t'), \\ \Theta(t-t')\phi(t) &= iG^0(t,t')\phi(t'). \end{aligned} \quad (3)$$

Dla oddziaływania niezależnego od czasu  $G(t,t') = -i\Theta(t-t') \exp[-\frac{i}{\hbar}H(t-t')]$ . Zróżniczkowanie powyższych relacji definiujących propagatory względem czasu i skorzystanie z faktu, że wektory  $\psi$  i  $\phi$  spełniają odpowiednio pełne i swobodne równanie Schrödingera, a poza tym są dowolne, prowadzi do

równań dla propagatora

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}G(t, t') - \frac{1}{\hbar}HG(t, t') &= \delta(t - t'), \\ i\frac{d}{dt}G^0(t, t') - \frac{1}{\hbar}H_0G^0(t, t') &= \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (4)$$

W reprezentacji położeniowej dla rozproszenia potencjalnego można napisać

$$\Theta(t-t')\psi(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | iG(t, t') \int d^3r' | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \psi(t') \rangle \equiv i \int d^3r' G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \psi(\mathbf{r}', t'). \quad (5)$$

Jest to formalny wyraz zasady Huygensa dla ruchu falowego: każdy punkt  $\mathbf{r}'$  jest źródłem nowej fali, a złożenie tych fal, dokonane za pomocą propagatora, tworzy falę w chwili późniejszej w każdym punkcie  $\mathbf{r}$ .

Ewolucja od  $\phi_\alpha$  w dalekiej przeszłości  $t'$  do  $\psi_\alpha(t)$  opisana jest relacją

$$\psi_\alpha(t) = \lim_{t' \rightarrow -\infty} iG(t, t')\phi_\alpha(t'). \quad (6)$$

W dalekiej przyszłości paczki falowe znów ewoluują swobodnie; możliwe stany końcowe  $\phi_\beta$  stanowią bazę. Amplituda prawdopodobieństwa przejścia ze stanu  $\phi_\alpha$  do stanu  $\phi_\beta$  w wyniku zderzenia wynosi

$$S_{\beta\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_\beta(t) | \psi_\alpha(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty} \langle \phi_\beta(t) | iG(t, t') | \phi_\alpha(t') \rangle. \quad (7)$$

Macierz  $S$ , zwana też macierzą rozpraszania, stanowi jedno z najważniejszych pojęć mechaniki kwantowej, nie tylko związków z opisem zderzeń.

Równanie różniczkowe dla propagatora można przekształcić w całkowe

$$G(t, t') = G^0(t, t') + \int dt_1 G^0(t, t_1) \frac{1}{\hbar} V(t_1) G(t_1, t'), \quad (8)$$

co można sprawdzić działając na obie strony operatorem  $i\frac{d}{dt} - \frac{1}{\hbar}H_0$ . Z ostatniego równania można otrzymać równanie Lippmanna-Schwingera dla wektora  $\psi_\alpha$

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(t) &= \lim_{t' \rightarrow -\infty} iG(t, t')\phi(t') = \\ &= \lim_{t' \rightarrow -\infty} [iG^0(t, t') + \int dt_1 G^0(t, t_1) \frac{1}{\hbar} V(t_1) iG(t_1, t')] \phi_\alpha(t') = \end{aligned} \quad (9)$$

$$\phi_\alpha(t) + \int dt_1 G^0(t, t_1) \frac{1}{\hbar} V(t_1) \psi_\alpha(t_1). \quad (10)$$

Równanie całkowe na propagator, zapisane symbolicznie jako  $G = G^0 + G^0 \frac{1}{\hbar} V G$  daje się iterować

$$G = G^0 + G^0 \frac{1}{\hbar} V G^0 + G^0 \frac{1}{\hbar} V G^0 \frac{1}{\hbar} V G^0 + \dots \quad (11)$$

Oznacza to, że pełną ewolucję można traktować jako szereg aktów ewolucji swobodnej, przeplatanych aktami oddziaływania w określonym punkcie i czasie, przy czym następuje całkowanie po wszystkich możliwych miejscach i chwilach oddziaływania. Na przykład wyrazy zerowego i pierwszego rzędu dla zderzenia potencjalnego mają postać

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = G^0(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') + \int dt_1 d^3 r_1 G^0(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_1, t_1) \frac{1}{\hbar} V(\mathbf{r}_1, t_1) G^0(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}', t') + \dots \quad (12)$$

Wstawienie raz przeiterowanego równania na propagator do formuły na macierz rozpraszania daje

$$S_{\beta\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty} \langle \phi_\beta(t) | iG^0(t, t') | \phi_\alpha(t') \rangle + \lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty} \langle \phi_\beta(t) | \int dt_1 iG^0(t, t_1) \frac{1}{\hbar} V(t_1) G(t_1, t') | \phi_\alpha(t') \rangle = \quad (13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_\beta(t) | \phi_\alpha(t) \rangle + \int dt_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_\beta(t) | G^0(t, t_1) \frac{1}{\hbar} V(t_1) | \psi_\alpha(t_1) \rangle = \delta_{\beta\alpha} - i \int dt_1 \langle \phi_\beta(t_1) | \frac{1}{\hbar} V(t_1) | \psi_\alpha(t_1) \rangle, \quad (14)$$

gdzie skorzystano z faktu, że propagator działając na wektor sprzężony propaguje go wstecz w czasie, tzn. zachodzi dla dowolnego  $\gamma$

$$\langle \phi_\beta(t) | iG^0(t, t_1) | \phi_\gamma(t_1) \rangle = \langle \phi_\beta(t) | \phi_\gamma(t) \rangle = \delta_{\beta\gamma} = \langle \phi_\beta(t_1) | \phi_\gamma(t_1) \rangle, \quad (15)$$

czyli, dzięki temu że wektory  $\phi$  są ortonormalne w każdej chwili, zachodzi

$$\langle \phi_\beta(t) | iG^0(t, t_1) = \langle \phi_\beta(t_1) |. \quad (16)$$

Dla oddziaływania niezależnego od czasu można przejść do granicy i przyjąć zamiast paczek falowych - rozwiązania stacjonarne (normowane do delty Diraca):  $\psi_\alpha(t) = \psi_\alpha \exp[-\frac{i}{\hbar} E_\alpha t]$  i  $\phi_\alpha(t) = \phi_\alpha \exp[-\frac{i}{\hbar} E_\alpha t]$ . Ponieważ rozwiązania stacjonarne nie są zlokalizowane i nie można powiedzieć, że

cząstki są odległe od siebie w  $t \rightarrow \pm\infty$ , mówi się zamiast tego, że adiabaticznie wyłączamy oddziaływanie, zastępując  $V$  przez  $V \exp(-\eta|t|)$ , gdzie  $\eta$  jest dowolnie małą liczbą dodatnią.

Przy całkowaniu pojawiają się wyrażenia typu  $\frac{1}{x+i\eta}$ . Ich interpretację otrzymuje się, badając je pod całką z regularną funkcją  $F(x)$  i traktując zmienną  $x$  jak zespoloną

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+i\eta} F(x) dx = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{F(x)}{x} dx + \int_C \frac{f(z)}{z} dz + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{F(x)}{x} dx, \quad (17)$$

gdzie krzywa  $C$  jest łukiem okręgu o promieniu  $\epsilon$  i kącie zmieniającym się od  $\pi$  do 0. Sumę pierwszego i ostatniego wyrazu nazywa się częścią główną całki i oznacza przez  $P$  (jest to pewne uogólnienie całki niewłaściwej - ta ostatnia istniałaby, gdyby istniała granica przy niezależnym podchodzeniu do zera z lewej i prawej strony, a u nas podchodzi się symetrycznie. Całka po krzywej  $C$  przy  $\epsilon \rightarrow 0$  daje  $F(0) \int_{\pi}^0 \frac{\epsilon i \exp(i\phi)}{\epsilon \exp(i\phi)} d\phi = -i\pi \int F(x) \delta(x) dx$ . Zachodzi więc relacja  $\frac{1}{x \pm i\eta} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi \delta(x)$ . W wyrażeniu na macierz rozpraszania można wykonać całkę po  $t_1$  i otrzymać

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_{\beta} - E_{\alpha})t_1 \exp(-\eta|t_1|)\right] = \\ & \int_{-\infty}^0 dt_1 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_{\beta} - E_{\alpha})t_1 \exp(\eta t_1)\right] + \int_0^{\infty} dt_1 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_{\beta} - E_{\alpha})t_1 \exp(-\eta t_1)\right] = \\ & \frac{1}{\frac{i}{\hbar}(E_{\beta} - E_{\alpha}) + \eta} + \frac{-1}{\frac{i}{\hbar}(E_{\beta} - E_{\alpha}) - \eta} = 2\pi\hbar\delta(E_{\beta} - E_{\alpha}). \end{aligned} \quad (18)$$

Macierz  $S$  daje się więc zapisać jako

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} - 2\pi i \delta(E_{\beta} - E_{\alpha}) \langle \phi_{\beta} | V | \psi_{\alpha} \rangle. \quad (19)$$

Macierz  $T_{\beta\alpha} = \langle \phi_{\beta} | V | \psi_{\alpha} \rangle$  nazywa się macierzą przejścia na powłoce energii.

Po uwzględnieniu zależności wektorów  $\phi_{\alpha}$  i  $\psi_{\alpha}$  od czasu równanie Lippmanna-Schwingera przybiera postać

$$\psi_{\alpha} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{\alpha} t\right) = \phi_{\alpha} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{\alpha} t\right) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt_1 \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H_0(t - t_1)\right] \exp(\eta|t_1|) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{\alpha} t_1\right) V \psi_{\alpha}.$$

Dla  $t = 0$  otrzymuje się w szczególności

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= \phi_\alpha - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt_1 \exp\left[\frac{i}{\hbar} H_0 t_1\right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_\alpha t_1\right) \exp(\eta t_1) V \psi_\alpha = \\ & \phi_\alpha + \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\epsilon} V \psi_\alpha \end{aligned} \quad (21)$$

( $\epsilon$  jest znów dowolnie małą liczbą dodatnią, proporcjonalną to  $\eta$ ). Jest to równanie analogiczne do równań stacjonarnej teorii zderzeń (takie samo potraktowanie osobliwości przy odwracaniu operatora, które tu wynika z adiabaticznego wyłączenia oddziaływania w  $t \rightarrow -\infty$ ).

Można równanie Lippmanna-Schwingera przekształcić nieco inaczej, bez odwoływania się do wyłączania oddziaływania, ale dochodząc do tego samego wyniku. Mamy

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= \phi_\alpha - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \Theta(-t_1) \exp\left[\frac{i}{\hbar} (E_\alpha - H_0)(-t_1)\right] V \psi_\alpha = \\ & \phi_\alpha - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(\tau) \exp\left[\frac{i}{\hbar} (E_\alpha - H_0)\tau\right] V \psi_\alpha \end{aligned} \quad (22)$$

Dla liczby  $x$  prawdziwa jest relacja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iz\tau)}{z - x - i\eta} dz = 2\pi i \Theta(\tau) \exp(ix\tau), \quad (23)$$

gdzie zamknięto kontur całkowania w górnej półpłaszczyźnie. Zastosowanie tej relacji, prawdziwej też dla operatorów, w przypadku  $x = \frac{1}{\hbar}(E_\alpha - H_0)$  sprawi, że pojawi się całka

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\exp[iz\tau]}{z - \frac{1}{\hbar}(E_\alpha - H_0) - i\eta} dz dt_1 = \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\hbar\eta}, \quad (24)$$

co po wykonaniu całki po  $\tau$ , która daje  $2\pi\delta(z)$ , prowadzi do

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha + \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\epsilon} V \psi_\alpha. \quad (25)$$

Można udowodnić kilka ważnych tożsamości.

Równanie Lippmanna-Schwingera można formalnie rozwiązać, pisząc

$$\left[1 - \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\epsilon} V\right] \psi_\alpha = \phi_\alpha \quad (26)$$

i dalej

$$[E_\alpha - H + i\epsilon]\psi_\alpha = [E_\alpha - H_0 - V + V + i\epsilon]\phi_\alpha, \quad (27)$$

czyli

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha + \frac{1}{E_\alpha - H + i\epsilon}V\phi_\alpha. \quad (28)$$

Macierz przejścia  $T$  można napisać jako

$$T_{\beta\alpha} = \langle\phi_\beta|V|\psi_\alpha\rangle = \langle\phi_\beta|[V + V\frac{1}{E_\alpha - H + i\epsilon}V]|\phi_\alpha\rangle. \quad (29)$$

Propagatorowi w ostatnim równaniu można kazać działać po sprzężeniu na lewy wektor, co daje

$$T_{\beta\alpha} = \langle\psi_\beta^-|V|\phi_\alpha\rangle, \quad (30)$$

gdzie

$$|\psi_\beta^- \rangle = |\phi_\beta \rangle + \frac{1}{E_\beta - H - i\epsilon}V|\phi_\beta \rangle = |\phi_\beta \rangle + \frac{1}{E_\beta - H_0 - i\epsilon}V|\psi_\beta^- \rangle \quad (31)$$

( $E_\beta = E_\alpha$ ). Wektor  $\psi_\beta^-$  pojawiłby się w sposób naturalny, gdyby od początku wprowadzić propagatory opisujące ewolucję wstecz w czasie i powtórzyć rozważania z niniejszego podrozdziału z potrzebnymi zmianami.

Okazuje się, że macierz  $S_{\beta\alpha}$  daje się napisać jako iloczyn skalarny

$$\begin{aligned} \langle\psi_\beta^-|\psi_\alpha\rangle &= [\langle\phi_\beta(1 + V\frac{1}{E_\beta - H - i\epsilon})|\psi_\alpha\rangle = \\ &\langle\phi_\beta|\psi_\alpha\rangle + \langle\phi_\beta|V\frac{1}{E_\beta - H + i\epsilon}|\psi_\alpha\rangle \\ &\langle\phi_\beta|[\phi_\alpha + \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\epsilon}V|\psi_\alpha\rangle] + \langle\phi_\beta|V\frac{1}{E_\beta - H + i\epsilon}|\psi_\alpha\rangle = \\ &\delta_{\beta\alpha} + [\frac{1}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon} + \frac{1}{E_\beta - E_\alpha + i\epsilon}]\langle\phi_\beta|V|\psi_\alpha\rangle \\ &= \delta_{\beta\alpha} - 2\pi i\delta(E_\beta - E_\alpha)\langle\phi_\beta|V|\psi_\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Daje się tu rozpoznać postać macierzy  $S$  udowodnioną wyżej. Skorzystano z faktu, że  $\phi$  i  $\psi$  są wektorami własnymi odpowiednio  $H_0$  i  $H$ , oraz z relacji  $\frac{1}{x \pm i\eta} = P(\frac{1}{x}) \mp i\delta(x)$ .

## 1.2 Rozpraszanie na dwóch potencjałach

Założmy, że potencjał składa się z dwóch składników, tzn.  $V = V_A + V_B$ . Czasem fizyczna sytuacja narzuca taki rozkład. Oprócz rozwiązań swobodnych  $\phi$  i pełnych  $\psi$ , tzn. "czujących" potencjał  $V$ , wprowadza się rozwiązania  $\chi$ , które "odczuwają" tylko potencjał  $V_B$ .

Korzystając z relacji

$$\begin{aligned} |\chi_\beta^- \rangle &= \phi_\beta + \frac{1}{E_\beta - H_0 - i\epsilon} V_B |\chi_\beta^- \rangle, \\ |\psi_\alpha \rangle &= |\phi_\alpha \rangle + \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\epsilon} (V_A + V_B) |\psi_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha} &= \langle \phi_\beta | V_A + V_B | \psi_\alpha \rangle = \\ &= \{ \langle \chi_\beta^- | - \langle \chi_\beta^- | V_B \frac{1}{E_\beta - H_0 + i\epsilon} \} (V_A + V_B) | \psi_\alpha \rangle = \end{aligned} \quad (34)$$

$$\langle \chi_\beta^- | V_A | \psi_\alpha \rangle + \langle \chi_\beta^- | V_B | \psi_\alpha \rangle - \langle \chi_\beta^- | V_B \{ |\psi_\alpha \rangle - |\phi_\alpha \rangle \} = \quad (35)$$

$$\langle \chi_\beta^- | V_A | \psi_\alpha \rangle + \langle \chi_\beta^- | V_B | \phi_\alpha \rangle, \quad (36)$$

(skorzystano z faktu, że  $E_\alpha = E_\beta$ ).

Element macierzy przejścia składa się więc z dwóch wyrazów:

- pierwszy ma strukturę odpowiadającą rozproszeniu przez potencjał  $V_A$ , przy czym swobodny stan końcowy został zastąpiony przez falę odkształconą przez  $V_B$  z warunkiem brzegowym właściwym dla ewolucji w tył w czasie,
- drugi opisuje rozproszenie tylko przez potencjał  $V_B$  (także w wersji z warunkiem brzegowym właściwym dla ewolucji w tył w czasie).

## 1.3 Prawdopodobieństwo przejścia a przekrój czynny

Rozważmy zderzenie potencjalne. W tym przypadku stan początkowy  $\alpha$  jest tożsamy ze stanem o określonym wektorze falowym  $\mathbf{k}$ , a stan końcowy  $\beta$  z  $\mathbf{k}'$ . Prawdopodobieństwo przejścia dla  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  wynosi

$$|S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 = 4\pi^2 |T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 \delta(E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}}) \frac{1}{2\pi\hbar} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}})t\right] dt, \quad (37)$$

gdzie jedną z delta Diraca przedstawiono w postaci całkowej. Z uwagi na pierwszą deltę Diraca całka daje w wyniku  $t$  (duże). Porównanie z doświadczeniem

będzie możliwe po wysumowaniu po stanach końcowych. Podobnie jak w rozważanym już przypadku, przy kwantyzacji w sześciennym pudle o objętości  $V$  liczba dozwolonych stanów końcowych o wektorach falowych  $\mathbf{k}'$  o końcach w objętości  $d^3k'$  wynosi

$$d^3k' \frac{V}{(2\pi)^3} = k'^2 dk' d\Omega \frac{V}{(2\pi)^3} = \frac{k' m dE_{\mathbf{k}'}}{\hbar^2} d\Omega \frac{V}{(2\pi)^3}. \quad (38)$$

Wyrażenie  $|S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 \frac{1}{t}$  należy wysumować po wektorach falowych  $\mathbf{k}'$  stanu końcowego, albo, co równoważne, wyciąkować po energiach końcowych z wagą  $\frac{k' m dE_{\mathbf{k}'}}{\hbar^2} d\Omega \frac{V}{(2\pi)^3}$ . Delta Diraca wykona całkowanie po energiach  $E_{\mathbf{k}'}$  i otrzymamy

$$|S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 \frac{1}{t} \rightarrow \frac{2\pi}{\hbar^3} |T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 \frac{V k m}{(2\pi)^3} d\Omega = \frac{m^2}{(2\pi \hbar^2)^2} |T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 V^2 d\Omega \frac{\hbar k}{mV}. \quad (39)$$

Wynik zapisano tak, aby rozpoznać w nim różniczkowy przekrój czynny  $d\sigma$  oraz gęstość prądu cząstek padających (ostatni ułamek). Należy zwrócić uwagę, że w niniejszym rozdziale i w rozdziale o stacjonarnej teorii zderzeń używano różnych normalizacji wektorów falowych. Tu rozwiązanie są normalizowane do 1, a tam nie były normowane. Stąd  $|T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 V^2$  i  $\frac{\hbar k}{mV}$  z tego rozdziału odpowiadają  $|T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2$  i  $\frac{\hbar k}{m}$  z wcześniejszego rozdziału.

## 1.4 Zderzenia cząstek jednakowych

Występowanie cząstek jednakowych, wobec niemożności śledzenia trajektorii, oznacza niemożność identyfikacji cząstek. Procesy, w których cząstka rozproszona w danym kierunku jest cząstką tożsamą z cząstką padającą lub jest tą drugą, muszą być traktowane na tych samych prawach. Formalnym wyrazem tego jest konieczność symetrii lub antysymetrii funkcji falowej, zależnie od tego, czy mamy do czynienia z bozonami czy fermionami.

Przy przedstawionym tu opisie zderzenia potencjalnego jedna z cząstek zlokalizowana jest w początku układu, a druga ma współrzędną  $\mathbf{r}$ . Przy fali padającej wzdłuż osi  $z$  fala rozproszona jest falą kulistą  $f(\theta, \phi) \frac{\exp(ikr)}{r}$ , gdzie  $\theta$  i  $\phi$  są współrzędnymi kulistymi wektora  $\mathbf{r}$ . Zamiana cząstek odpowiada zamianie  $\mathbf{r}$  na  $-\mathbf{r}$ . Wektorowi  $-\mathbf{r}$  odpowiadają kąty  $\pi - \theta$  i  $\phi + \pi$ , a długość  $r$  się nie zmienia. Dlatego odpowiednie fale rozproszone mają postać

$$f(\theta, \phi) \frac{\exp(ikr)}{r},$$



$$f(\pi - \theta, \phi + \pi) \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (40)$$

Zgodnie z zasadami mechaniki kwantowej łączne prawdopodobieństwo nierozróżnialnych procesów należy określać dodając funkcje falowe, a więc amplitudy prawdopodobieństwa. Fala rozproszona musi więc być napisana jako

$$[f(\theta, \phi) \pm f(\pi - \theta, \phi + \pi)] \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (41)$$

Różniczkowy przekrój czynny na zderzenie jest więc dany jako

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi) \pm f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2. \quad (42)$$

Dla cząstek bezspinowych funkcja falowa, a więc tylko przestrzenna, musi być symetryczna, czyli trzeba wziąć znak "plus". Dla cząstek o niezerowym spinie pełna funkcja, tzn. również z udziałem funkcji spinowej, musi mieć odpowiednią symetrię. Na przykład dla cząstek o spinie  $\frac{1}{2}$  (elektronów, protonów...) pełna funkcja musi być antysymetryczna. Jeśli funkcja spinowa jest symetryczna, funkcja przestrzenna musi być antysymetryczna i należy wziąć "minus". Jeśli funkcja spinowa jest antysymetryczna, funkcja przestrzenna musi być symetryczna i należy wziąć "plus". Jeśli wszystkie stany spinowe są równo prawdopodobne, przekój czynny należy obliczyć jako

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}|f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2 + \frac{3}{4}|f(\theta, \phi) - f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2, \quad (43)$$

przy czym współczynniki biorą się stąd, że mamy trzy spinowe stany symetryczne

$$\begin{aligned} &\alpha(1)\alpha(2), \\ &\beta(1)\beta(2), \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)], \end{aligned} \quad (44)$$

a tylko jeden spinowy stan antysymetryczny

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)], \quad (45)$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są stanami spinowymi  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$

Dla bardziej skomplikowanych sytuacji, np. dla zderzenia elektronu z atomem, opis jest bardziej skomplikowany i nie będzie tu rozważany.