

Andrzej Raczyński

Mechanika kwantowa cz. 11

I. INTERPRETACJE, TRUDNOŚCI I SZANSE

Osobliwością mechaniki kwantowej jest fakt, że teoria, tak skuteczna w przewidywaniach wyników doświadczeń, od blisko stu lat nie doczekała się jednolitej, akceptowanej przez wszystkich interpretacji. Nie ma podglądowego obrazka nawet pojedynczej cząstki kwantowej; nasz język codzienny, używany także w fizyce klasycznej, tu nie jest skuteczny. Nie osiągnięto zgody w sprawie fundamentalnych pytań, na przykład:

- jaki jest sens opisu probabilistycznego pojedynczych zdarzeń;
- czy mechanika kwantowa jest teorią pojedynczych układów (jak mechanika klasyczna), czy zespołów statystycznych, a więc wielkiej liczby identycznych układów lub inaczej układu, na którym wykonuje się ciąg identycznych doświadczeń, każdorazowo przywracając te same warunki początkowe (jak klasyczna fizyka statystyczna);
- jak rozumieć podstawowy postulat mechaniki kwantowej opisujący pomiar, tzn. jak spośród wielu potencjalnych wyników pomiarów (o określonych prawdopodobieństwach ich wystąpienia) aktualizuje się jeden z nich;
- jak rozumieć korelacje kwantowe pojawiające się w przypadku stanów splątanych;
- czy mechanika kwantowa może być interpretowana ontologicznie, a więc czy opisuje byty fizyczne, np. funkcja falowa byłaby wtedy bytem fizycznym;
- czy mechanika kwantowa może być interpretowana "tylko" epistemologicznie, a więc daje tylko o narzędzie opisu rzeczywistości, np. funkcja falowa byłaby miarą naszej wiedzy o układzie fizycznym;
- czy można rozważać własności obiektu kwantowego w oderwaniu od obserwatora i aparatury.

Większość fizyków uprawia z sukcesem swój zawód bez zastanawiania się nad tymi problemami, ale jest to jednak pewna rezygnacja. Z tych, którzy jednak szukają głębszego zrozumienia, znaczna część skłania się ku jakiejś wersji interpretacji kopenhaskiej, pochodzącej od Bohra. Będąc pod wpływem filozofii neopozytywistycznej, twierdził on, że o układzie fizycznym, np. cząstce, można mówić tylko w kontekście określonej sytuacji doświadczalnej. Nie ma sensu pytać o własności układu jako takiego, w abstrakcji od doświadczenia. Kwantowy obiekt w powiązaniu z klasyczną aparaturą ujawnia swe własności odpowiednio do tej aparatury. Jeśli na przykład cząstkę skierujemy na układ dwóch szczelin (doświadczenie Younga), odpowiada to sytuacji pomiaru pędu, natomiast położenie nie jest określone, bo nie podlega pomiarowi. Odwrotnie, jeżeli cząstkę skierujemy na luminofor (lub kamerę CCD), mierzymy jej położenie, lecz jej pęd pozostaje nieokreślony, jako aktualnie niemierzony. O zasadzie nieoznaczoności powie się raczej, że położenie lub pęd są nieokreślone, niż że pomiar jednego zakłóca wartość drugiego. Własności ujawniające się w różnych warunkach doświadczalnych, a więc niemożliwe do równoczesnego określenia Bohr nazwał komplementarnymi i pojęcie to czynił fundamentem swej interpretacji.

Przy pomiarze wielkości A reprezentowanej przez operator A , mający wektory własne ψ_n i odpowiadające im wartości własne α_n , w stanie $\psi = \sum_n c_n \psi_n$ jedna z możliwości się aktualizuje, tzn. otrzymujemy w wyniku pomiaru α_k ; wtedy wektor stanu zmienia się w sposób skokowy: $\psi \rightarrow \psi_k$; nazywa się to redukcją pakietu. Dla niektórych jest to argumentem na rzecz stwierdzenia, że wektor stanu jest miarą wiedzy o układzie, która zmieniła się nagle. Cały formalizm byłby więc narzędziem poznania.

Von Neumann zaproponował inne podejście. Uznał, że również aparatura powinna być opisana kwantowo i należy rozważyć nadukład złożony z układu i aparatu. Temu pierwszemu odpowiada przestrzeń Hilberta o bazie ψ_n , temu drugiemu - przestrzeń Hilberta o bazie χ_n . Na początku nadukład jest stanie $\sum_n c_n \psi_n \otimes \chi_0$, gdzie χ_0 jest położeniem początkowym miernika. W drodze ewolucji unitarnej układ przechodzi do stanu $\sum_n c_n \psi_n \otimes \chi_n$, a więc pozycja n miernika odpowiadająca jego stanowi χ_n świadczy, że układ jest w stanie ψ_n , czyli po redukcji pakietu nadukład kończy pomiar w stanie $\psi_k \otimes \chi_k$. Trudność polega na tym, że do odczytania kwantowego stanu miernika potrzeba nowej aparatury (z nową przestrzenią Hilberta) i tak nieskończoność. Ten regres usiłowano przerwać odwołując się do świadomości badacza na końcu tego łańcucha, trudno to jednak przyjąć, bo nie znamy fizyki świadomości.

Istnieje szereg innych interpretacji. Niektóre z nich, związane z nazwiskiem Bohra, pozwalające wyobrazić sobie cząstkę na sposób klasyczny, jednak poddana jest ona działaniu kwantowego potencjału o bardzo dziwnych własnościach. Są też próby interpretacji w kategoriach zmiennych ukrytych. Miałyby to być wielkości na doświadczalnie niedostępnym w tej chwili poziomie i różne zachowanie cząstek w tym samym stanie tłumaczone byłoby różnymi wartościami zmiennych ukrytych charakteryzujących te cząstki. Okazuje się jednak, że teoria oparta na zmiennych ukrytych musiałaby mieć nieintuicyjne własności, o czym niżej.

Najdziwniejszą jest interpretacja pochodząca od Everetta. Chcąc uniknąć trudności związanych z rozpadem pakietu

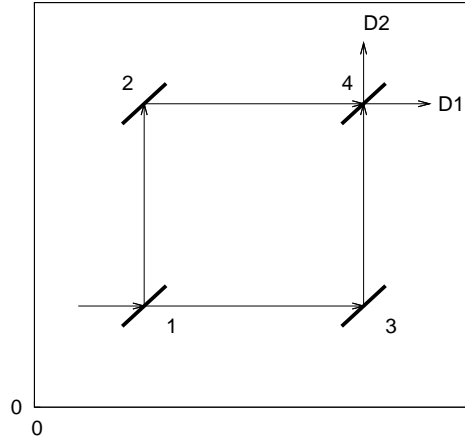


FIG. 1. Interferometr Macha-Zehndera

założył, że każdemu pomiarowi towarzyszy rozszczepienie Wszechświata na gałęzie, do których wpada układ razem z obserwatorem i w każdej gałęzi występuje inna określona wartość pomiaru. Między gałęziami i (rozszczepionymi obserwatorami) nie ma już komunikacji. Podejście takie jest rażąco sprzeczne z zasadą metodologiczną znaną jako brzytwa Ockhama i mówiącą, że należy przyjmować rozwiązania najprostsze, nie mnożąc bytów poza konieczną potrzebę. Niektórzy interpretację tę uznają za nefalsyfikowalną, a więc nienaukową.

A. Paradoks kota Schrödingera

Paradoks polega na następującym doświadczeniu myślowym. Dane jest zamknięte pudło, w którym znajduje się radioaktywna cząstka, licznik Geigera-Müllera z elektromechanicznym przekaźnikiem, ampulka z trucizną i kot. Rozpad cząstki powoduje impuls licznika, uruchomienie przekaźnika, zbitcie ampulki i uśmiercenie kota. Wiadomo, że cząstka może być w stanie ψ_0 przed rozpadem lub ψ_{rozp} po rozpadzie. Układ cząstka-kot jest więc w stanie

$$|\Psi\rangle = c_1|\psi_0\rangle|\dot{żywy}\rangle + c_2|\psi_{rozp}\rangle|\text{martwy}\rangle. \quad (1)$$

Pomiar polega na otwarciu pudła. Zastosowanie formalizmu mechaniki kwantowej każe wierzyć, że przed pomiarem kot był w nieokreślonym stanie, a jego los dopełnił się dopiero w chwili otwarcia pudła. Jest to niezgodne z naszą intuicją wziętą z makroświata. Prawdopodobnie nie można bezkrytycznie stosować praw kwantowych do obiektów makroskopowych a tym bardziej żywych. Sam kot, jako podukład większego układu, przed pomiarem opisany jest macierzą gęstości, w dodatku układ jest bardzo wrażliwy na oddziaływanie z otoczeniem, co powoduje dekoherencję, czyli szybkie uśrednienie elementów niediagonalnych macierzy gęstości do zera. Paradoksu nie będzie, gdy odniesiemy wynik do zespołu statystycznego kotów.

B. Efekty interferencyjne

Superpozycja wektorów stanu, w szczególności funkcji falowych, prowadzi do efektów interferencyjnych. Najbardziej znane jest doświadczenie Younga, czyli interferencja fal wychodzących z dwóch blisko położonych szczelin. Kwantowy charakter zjawiska ujawnia się, gdy natężenie światła staje się tak małe, że w układzie znajduje się w tym samym przedziale czasu najwyżej jeden foton. Każdy foton pada na ekran. Punkty, w których jest wykryty początkowo wyglądają na rozłożone chaotycznie, ale po długim czasie ekspozycji układają się w prążki, jakie otrzymano by przy dużym natężeniu światła. Próba wykrycia przez którą z dwóch szczelin przeszedł foton, niszczy prążki interferencyjne. W pierwotnym doświadczeniu bada się pęd, a położenie pozostaje nieokreślone; próba pomiaru położenia oznacza rezygnację z określenia pędu. Jeśli założyć, że wszystkie fotony są identyczne, doświadczenie skłania do interpretowania wektora faowego jako opisującego pojedynczy foton, a nie zespół statystyczny.

Bardziej wyrafinowaną wersją jest interferometr Macha-Zehndera. Foton reprezentowany falą ψ_H (biegnący poziomo) pada na płytkę światłodzielną 1. Z amplitudą prawdopodobieństwa $\frac{1}{\sqrt{2}}$ przechodzi i z taką samą amplitudą odbija się (fala biegnąca pionowo oznaczona jest przez V), doznając skoku fazy $\frac{\pi}{2}$. Po przejściu przez płytkę

funkcja falowa ma postać

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_H + i\psi_V]. \quad (2)$$

Po odbiciu od zwierciadał 2 i 3 oba składniki doznają przesunięcia fazowego i otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[i\psi_V + i^2\psi_H]. \quad (3)$$

Na płycie światłodzielącej 4 oba składniki ulegają rozszczepieniu i otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_V + i\psi_H) + i^2\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_H + i\psi_V)\right] = -\psi_H. \quad (4)$$

Oznacza to, że sygnał zarejestruje tylko detektor $D1$. Amplitudy prawdopodobieństwa rejestracji impulsu przez detektor $D2$ uległy interferencji destruktywnej. Warunkiem takiego przebiegu procesu jest równość dróg dolnej i górnej. Przy dużej różnicy dróg paczki falowe fotonów nie spotykają się i interferencji nie będzie. Można powiedzieć, że foton biegł obiema drogami. Próba wykrycia, którą drogą biegł foton niszczy interferencję. Wyjęcie płytki 4 powoduje, że każdy z detektorów da sygnał z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

Robiono też doświadczenia z opóźnionym wyborem, wymyślone przez Wheelera. O tym, czy w układzie znajdzie się płytka 4 zdecydowano w czasie, gdy foton opuścił już płytkę 1. Próbowano odpowiedzieć na pytanie, czy na płycie 1, a więc w trakcie procesu, decyduje się, czy foton przejdzie drogą górną, dolną, czy obiema. Odpowiedź jest taka, że dopiero po całkowitym zakończeniu pomiaru okazuje się, jak proces przebiegł.

Jako ciekawostkę można podać doświadczenie myślowe zaproponowane przez Vaidmana i Elitzura. Wyobraźmy sobie, że mamy bomby wyposażone w ultraczuły zapalnik, który jest uruchamiany przez jeden foton, z tym że niektóre zapalniki są wadliwe. Istnieje sposób wybrania chociaż części sprawnych bomb. Wystarczy zastąpić zwierciadło 3 przez zapalnik bomby. Jeśli zapalnik jest wadliwy, proces przebiega tak, jak w zwykłym interferometrze i sygnał może zarejestrować tylko detektor $D1$. Jeśli zapalnik jest dobry, nasze doświadczenie jest w istocie próbą odkrycia, którą drogą biegł foton. Kwantowa interferencja jest uniemożliwiona, z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$ foton biegnie drogą górną lub dolną. W tym drugim przypadku bomba wybuchnie. W pierwszym przypadku z równymi prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$ foton trafi do $D1$ lub $D2$. Zatem w $\frac{1}{4}$ przypadków otrzymamy sygnał z $D2$, co znaczy, że bomba była dobra. Sygnał z $D1$ o niczym nie świadczy, bo taki sam wynik otrzymuje się w przypadku wadliwego zapalnika. Można poddać bombę ponownej próbie. Znowu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ bomba wybuchnie, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ bomba okże się dobra, i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ wynik będzie nieokreślony. Tak więc po wielu seriach prób wybierzemy dobre bomby z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots = \frac{1}{3}$.

C. Paradoks Einsteina, Rosena i Podolskiego

Paradoks sformułowany w roku 1935 stał się motywem do wieloletnich dyskusji o podstawach mechaniki kwantowej. Dotyczy układów wykazujących specyficzne korelacje kwantowe przysługujące stanom splątanim. Można go zademonstrować na przykładzie dwóch cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ znajdujących się w stanie o wypadkowym spinie 0 (singlet)

$$\psi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right]. \quad (5)$$

Występujące tu dwuwymiarowe wektory są wektorami własnymi rzutu spinu na oś z do wartości własnych $\pm \frac{\hbar}{2}$; indeksy 1 i 2 wskazują, do której cząstki odnosi się dany wektor. Cząstki w chwili początkowej znajdowały się blisko siebie, potem rozbiegły się na dużą odległość. Na cząstce 1 wykonano pomiar składowej z spinu; niech wynik pomiaru wynosi $\frac{\hbar}{2}$. Wtedy funkcja spinowa układu redukuje się do postaci

$$\psi(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2, \quad (6)$$

a więc rzut spinu drugiej cząstki został ustalony i ma z pewnością wartość $-\frac{\hbar}{2}$. Nastąpiło to natychmiast, niezależnie od odległości cząstek w przestrzeni.

Stan przed pomiarem jest równocześnie stanem własnym rzutu wypadkowego spinu na oś x do wartości własnej 0; można go napisać w postaci

$$\psi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_2 \right]. \quad (7)$$

Występujące tu dwuwymiarowe wektory są wektorami rzutu spinu na oś x do wartości własnych $\pm \frac{\hbar}{2}$. Identyczność wektorów $\psi(1, 2)$ zapisanych wyżej można to sprawdzić, wykonując mnożenie tensorowe według zasady

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ ad \\ bd \end{pmatrix}_{12}. \quad (8)$$

W obu przypadkach otrzymuje się ten sam wektor

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{12}. \quad (9)$$

Wyobraźmy sobie, że zamiast pomiaru rzutu spinu cząstki 1 na oś z wykonano by pomiar rzutu jej spinu na oś x , otrzymując wynik $\frac{\hbar}{2}$. Wtedy układ po pomiarze znalazłby się w stanie

$$-\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_2, \quad (10)$$

a rzut spinu cząstki 2 na oś x wyniósłby z pewnością $-\frac{\hbar}{2}$.

Zatem albo informacja o tym, którą oś wybrano przy pomiarze rzutu spinu cząstki 1, została natychmiast przekazana cząstce 2 albo wyniki rzutu spinu cząstki drugiej były już wcześniej ustalone. Pierwsze wydaje się w sprzeczności ze szczególną teorią względności, drugie z postulatami mechaniki kwantowej (nie można równocześnie znać z pewnością wartości wielkości niekomutujących). Einstein wnosił sąd, że mechanika kwantowa jest teorią niekompletną. Właściwe wydaje się stwierdzenie, że cząstka 2 odczuła pomiar wykonany na cząstce 1, tzn. istotnie zmienił się jej stan, ale nie ma to charakteru przekazu informacji. Będzie o tym mowa przy okazji teleportacji.

D. Nierówności Bella

Nierówności Bella są relacjami, które powinny być spełnione przy pewnych przyjętych założeniach odnośnie do teorii kwantowej. Są ich różne warianty; tu będzie mowa o jednym z nich. Celem jest zweryfikowanie, czy

prawdziwa jest lokalna teoria zmiennych ukrytych, tzn. czy rozkład probabilistyczny wyników pomiarów może wynikać stąd, że badane układy cząstki różnią się wartościami hipotetycznych wielkości fizycznych, niedostępnych na razie doświadczalnie.

Rozważmy wielkości fizyczne A, B, A', B' mają dwie dozwolone wartości $a_j, b_j, a'_j, b'_j = \pm 1$. Mogą to być rzuty spinu cząstki o spinie $\frac{1}{2}$ (z dokładnością do czynnika $\frac{\hbar}{2}$), ale inne pomiary można też tak uprościć. Prawdopodobieństwo, że pomiar wielkości A da wynik a_j i jednocześnie wynik pomiaru wielkości B da wynik b_k przy wartości zmiennej ukrytej λ jest $P(A, a_j, B, b_k, \lambda)$, przy czym założenie o lokalności, w tym przypadku niezależności pomiarów, wymaga, aby prawdopodobieństwa dotyczące pary pomiarów były iloczynami prawdopodobieństw dla poszczególnych pomiarów, tzn. $P(A, a_j, B, b_k, \lambda) = P(A, a_j, \lambda)P(B, b_k, \lambda)$. Funkcja korelacji jest zdefiniowana jako

$$C(A, B) = \sum_{\lambda} \rho(\lambda) \sum_{jk} a_j b_k P(A, a_j, \lambda) P(B, b_k, \lambda). \quad (11)$$

W powyższym wzorze wykonano średniowanie po zmiennej ukrytej λ , zakładając jej rozkład $\rho(\lambda)$. Weźmy teraz formę

$$\sum_j a_j P(A, a_j, \lambda) \sum_k [b_k P(B, b_k, \lambda) + b'_k P(B', b'_k, \lambda)] + \sum_j a'_j P(A', a'_j, \lambda) \sum_k [b_k P(B, b_k, \lambda) - b'_k P(B', b'_k, \lambda)]. \quad (12)$$

Zważywszy, że prawdopodobieństwa są liczbami z przedziału $[0,1]$, a wartości a_j, b_k, a'_j, b'_k są ± 1 , można zauważyć, że wartość tej formy leży w przedziale $[-2,2]$. Uśredniwszy po zmiennych ukrytych (pomnożenie przez $\rho(\lambda)$ i wysumowanie po λ) pozwala napisać nierówność Bella

$$-2 \leq C(A, B) + C(A, B') + C(A', B) - C(A', B') \leq 2. \quad (13)$$

Należy teraz sprawdzić, jakie wartości funkcji korelacji przewiduje mechanika kwantowa. Niech A jest rzutem spinu $\frac{1}{2}$ na kierunek $\mathbf{n}_1 = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$, B - rzutem spinu na kierunek $\mathbf{n}_2 = (\sin \beta, 0, \cos \beta)$ (pomijamy czynnik $\frac{\hbar}{2}$). Potrzebna jest średnia iloczynu $(\mathbf{n}_1 \sigma(1))(\mathbf{n}_2 \sigma(2))$ (σ jest wektorem, którego składowymi są macierze Pauliego). Operator ten ma więc postać

$$X = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}_2 \quad (14)$$

Obliczmy wartość średnią tego operatora w stanie

$$\psi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right]. \quad (15)$$

. Otrzymuje się

$$\psi(1, 2)^\dagger X \psi(1, 2) = \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right]^\dagger \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] = \\ & \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right]^\dagger \left[\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} \sin \beta & -\cos \beta \\ -\cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}_2 \right] = \\ & -\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (17)$$

Niech teraz A, B, A', B' będą rzutami spinu na wektory określone kolejno kątami $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha' = 0$, $\beta' = \frac{3\pi}{4}$. Otrzymuje się

$$C(A, B) + C(A, B') + C(A', B) - C(A', B') = -\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{-\pi}{4} + \cos \frac{-3\pi}{4} = -2\sqrt{2}. \quad (18)$$

Wartość ta leży poza przedziałem dozwolonym nierównością Bella. Gdyby udało się doświadczalnie otrzymać wartość spoza tego przedziału, znaczyłoby to, że założenia prowadzące do nierówności Bella są błędne, czyli lokalna teoria zmiennych ukrytych nie jest prawdziwa.

Doświadczenia takie wykonywał przez wiele lat Aspect, doskonaląc układ i eliminując wątpliwości. Nie używał jednak cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ lecz fotonów, emitowanych w kaskadzie przez atom wapnia. Rolę spinu przejęła tu polaryzacja fotonów, a nierówność Bella wyglądała nieco inaczej. Najważniejsze, że uważa się, iż nierówność Bella w tych doświadczeniach została złamana.

E. Teleportacja

Teleportacja polega na przeniesieniu stanu z układu kwantowego do innego układu kwantowego (nie na przeniesieniu obiektu, znajdującego się w danym stanie). Mamy cząstkę 1 w danym stanie, celem jest spowodowanie, aby cząstka 3 znalazła się w tym samym stanie, a pośredniczy w tym cząstka 2.

Można proces najprościej zilustrować w przypadku dwuwymiarowej przestrzeni stanów z bazą ψ_a i ψ_b . Zdefiniujmy najpierw stany dwucząstkowe maksymalnie splątane (Bella)

$$\begin{aligned}\Psi_1(1, 2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(1)\psi_a(2) + \psi_b(1)\psi_b(2)], \\ \Psi_2(1, 2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(1)\psi_a(2) - \psi_b(1)\psi_b(2)], \\ \Psi_3(1, 2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_b(1)\psi_a(2)], \\ \Psi_4(1, 2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_b(1)\psi_a(2)].\end{aligned}\tag{19}$$

Niech cząstka 1 znajduje się w stanie

$$\alpha\psi_a(1) + \beta\psi_b(1) \sim \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},\tag{20}$$

gdzie α i β są dowolnymi współczynnikami zespolonymi. Celem teleportacji jest, aby cząstka 3 znalazła się w takim samym stanie.

Niech nadawca (tradycyjnie nazywany Alicją) przygotuje układ trzech cząstek w stanie

$$\Phi(1, 2, 3) = [\alpha\psi_1(1) + \beta\psi_b(1)]\Psi_1(2, 3),\tag{21}$$

tzn. cząstka 1 jest w stanie, który chcemy teleportować, a cząstki 2 i 3 w jednym ze stanów Bella, np. w stanie Ψ_1 . Wyrażając stan Bella dla cząstek 2 i 3 przez stany jednocząstkowe, a potem stany cząstek 1 i 2 przez stany Bella można napisać ten stan w postaci (wykonano tylko operacje algebraiczne)

$$\begin{aligned}\Phi(1, 2, 3) &= \frac{1}{2}\Psi_1(1, 2) [\alpha\psi_a(3) - \beta\psi_b(3)] + \\ &\quad \frac{1}{2}\Psi_2(1, 2) [\alpha\psi_a(3) + \beta\psi_b(3)] + \\ &\quad \frac{1}{2}\Psi_3(1, 2) [\beta\psi_a(3) - \alpha\psi_b(3)] + \\ &\quad \frac{1}{2}\Psi_4(1, 2) [-\beta\psi_a(3) - \alpha\psi_b(3)].\end{aligned}\tag{22}$$

Alicja posyła cząstkę 3 do odbiorcy (tradycyjnie nazywanego Bobem), a sama wykonuje pomiar odpowiadający stanom Bella na cząstkach 1 i 2. W wyniku pomiaru cząstki 1 i 2 wpadają do jednego ze stanów Bella, a cząstka 3 wpada natychmiast do odpowiedniej superpozycji stanów $\psi_a(3)$ i $\psi_b(3)$. Nie jest to jednak natychmiastowe przesłanie informacji (zakazane przez teorię względności), bo Bob nie wie, w której z 4 superpozycji stanów ta cząstka się znalazła. Potrzebne jest przesłanie klasycznym kanałem informacji od Alicji do Boba, jaki wynik pomiaru otrzymała.

Jeśli Alicja otrzymała wynik odpowiadający stanowi Ψ_2 , cząstka 3 znalazła się w docelowym stanie. Jeśli natomiast wynik odpowiada stanowi 1,3 lub 4, Bob musi jeszcze cząstkę 3 poddać dodatkowej "obróbce", tzn. poddać ją oddziaływaniu przez odpowiedni odcinek czasu.

W przypadku stanu 1 oddziaływanie to musi być zadane macierzą

$$H = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V\sigma_z,\tag{23}$$

a oddziaływanie zmieni stan

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-i\gamma) & 0 \\ 0 & \exp(i\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix},\tag{24}$$

gdzie $\gamma = \frac{Vt}{\hbar}$. Jeśli wielkość i i czas oddziaływania dobierzemy tak, że $\gamma = \frac{\pi}{2}$, otrzymamy żądany stan (z nieistotnym czynnikiem i fazowym).

W przypadku stanu 3 oddziaływanie to musi być zadane macierzą

$$H = V \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = V \sigma_y, \quad (25)$$

gdzie σ_y jest macierzą Pauliego. Oddziaływanie zmienia stan w następujący sposób

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Jeśli wielkość i i czas oddziaływania dobierzemy tak, że $\gamma = \frac{\pi}{2}$, otrzymamy żądany stan.

W przypadku stanu 4 oddziaływanie musi być zadane macierzą

$$H = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V \sigma_x, \quad (27)$$

a ewolucja stanu ma postać

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) \begin{pmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -i \sin \gamma \\ -i \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Dla $\gamma = \frac{\pi}{2}$ otrzymamy żądany stan (z nieistotnym czynnikiem i).

Teleportację wykonano w licznych doświadczeniach, najczęściej z udziałem stanów fotonowych, a odległości, na które teleportowano stan, wynosiły nawet setki kilometrów.

Należy zwrócić uwagę, że stan teleportowany ulega zniszczeniu, tzn. cząstka 1 nie jest już w stanie wyjściowym. Jest to przykład ogólnego tzw. twierdzenia o nieklonowaniu, które mówi, że nie da się za pomocą liniowej transformacji przekształcić dowolnego stanu cząstki 1 i jakiegoś stanu cząstki 2 (ψ_0) w stan, w którym stan cząstki 2 byłby identyczny z niezmiennym stanem cząstki 1, czyli

$$U[\alpha\psi_a(1) + \beta\psi_b(1)] \otimes \psi_0(2) = [\alpha\psi_a(1) + \beta\psi_b(1)] \otimes [\alpha\psi_a(2) + \beta\psi_b(2)]. \quad (29)$$

Istotnie, działając operatorem U na oba składniki osobno otrzymujemy

$$U[\alpha\psi_a(1) + \beta\psi_b(1)] \otimes \psi_0(2) = \alpha\psi_a(1)\psi_a(2) + \beta\psi_b(1)\psi_b(2). \quad (30)$$

Widać, że dwa powyższe wyniki nie mogą być uzgodnione dla dowolnych wartości α i β .