Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.9

1 Mechanika hamiltonowska 2

1.1 Przekształcenia kanoniczne

Wyraźmy zmienne kanoniczne q_l, p_l, $l = 1, 2, ..., f$, przez nowe zmienne Q_s, P_s, $s = 1, 2, ..., f$

$$\begin{aligned} q_l &= q_l(Q, P, t), \\ p_l &= p_l(Q, P, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Jak zwykle $Q = (Q_1, ..., Q_l)$, $P = (P_1, ...P_l)$. Niech występujące tu funkcje mają ciągłe pierwsze pochodne i jakobian transformacji

$$\frac{D(q_1, ..., q_l, p_1, ..., p_l)}{D(Q_1, ..., Q_l, P_1, ..., P_l)} \neq 0, \tag{2}$$

co zapewnia istnienie transformacji odwrotnej.

W starych zmiennych spełnione są równania Hamiltona

$$\begin{aligned} \dot{q}_l &= \frac{\partial H}{\partial p_l}, \\ \dot{p}_l &= -\frac{\partial H}{\partial q_l}. \end{aligned} \tag{3}$$

Przekształcenie kanoniczne jest takim przkształceniem, które zachowuje równania Hamiltona, tzn. zachodzi

$$\begin{aligned} \dot{Q}_l &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_l}, \\ \dot{P}_l &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_l}, \end{aligned} \tag{4}$$

z pewnym nowym hamiltonianem $\bar{H}$, który w ogólności nie musi być starym hamiltonianem H, w którym zamieniono zmienne,.

Ponieważ równania Hamiltona są równoważne zasadzie wariacyjnej musi zachodzić

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum_l p_l \dot{q}_l - H) dt = 0,$$
$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum_l P_l \dot{Q}_l - \bar{H}) dt = 0, \tag{5}$$

przy czym $\delta q_l(t_0) = \delta p_l(t_0) = \delta q_l(t_1) = \delta p_l(t_1) = 0$, $\delta Q_l(t_0) = \delta P_l(t_0) = \delta Q_l(t_1) = \delta P_l(t_1) = 0$;(dla wariacji pędów nie jest to założenie konieczne, ale jest przydatne).

Odejmujęc powyższe relacje stronami otrzymuje się

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H - \bar{H})] dt = 0 \tag{6}$$

(traci się na ogólności, bo można by przed odjęciem pomnożyć jedną z wariacji funkcjonału przez stałą).

Kluczowa jest obserwacja, że dla prawdziwości ostatniej relacji wystarcza, aby funkcja podcałkowa była pochodną zwykłą pewnej funkcji Φ, tzn.

$$\sum_l (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H - \bar{H}) = \frac{d\Phi(Q, P, t)}{dt}. \tag{7}$$

Zachodzi wtedy

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H - \bar{H})] dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi(Q, P, t)}{dt} dt =$$
$$\delta \Phi|_{t_0}^{t_1} = \sum_l (\frac{\partial \Phi}{\partial Q_l} \delta Q_l + \frac{\partial \Phi}{\partial P_l} \delta P_l)|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{8}$$

z powodu znikania wariacji δQ_l i δP_l na końcach przedziału. Funkcję Φ nazywa się funkcją tworzącą przkształcenia kanonicznego.

Wygodniej jest uzależnić funkcję tworzącą od tych zmiennych, których różniczki pojawiają się formule; w tym przypadku są to zmienne q i Q. Trzeba wyrazić zmienne P_l przez zmienne q_s i Q_s, co jest możliwe, pod warunkiem niezerowania się wyznacznika $|\frac{\partial q_l}{\partial P_s}|$. Oznaczmy funkcję $\Phi(Q, P(q, Q, t), t) \equiv W(q, Q, t)$. Wtedy zachodzi

$$\sum_l (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H - \bar{H}) = \frac{dW(q, Q, t)}{dt} = \sum_l (\frac{\partial W}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial W}{\partial Q_l} \dot{Q}_l) + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (9)$$

Ponieważ pochodne występujące w ostatnim wzorze są niezależne, można napisać

$$p_l = \frac{\partial W}{\partial q_l}, \quad P_l = -\frac{\partial W}{\partial Q_l}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (10)$$

Ważniejszy jest jeszcze inny wariant. Dodajmy $\frac{d}{dt} \sum_l P_l Q_l$ do obu stron relacji

$$\sum_l (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H - \bar{H}) = \frac{d\Phi(Q, P, t)}{dt}. \quad (11)$$

Otrzymamy

$$\sum_l (p_l \dot{q}_l + Q_l \dot{P}_l) - (H - \bar{H}) = \frac{d}{dt}(\Phi(Q, P, t) + \sum_l P_l Q_l). \quad (12)$$

Jeśli wyrazimy zmienne Q_l przez zmienne q_s i P_s, co jest możliwe pod warunkiem niezerowania się wyznacznika $|\frac{\partial q_l}{\partial Q_s}|$ i przyjmiemy $\Phi(Q(q, P, t), P, t) + \sum_l P_l Q_l(q, P, t) = S(q, P, t)$, otrzymamy

$$\sum_l (p_l \dot{q}_l + Q_l \dot{P}_l) - (H - \bar{H}) = \frac{dS}{dt} = \sum_l (\frac{\partial S}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial S}{\partial P_l} \dot{P}_l) + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (13)$$

Można znowu przyrównać współczynniki stojące przy pochodnych i napisać

$$p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S}{\partial P_l}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (14)$$

Można także zapisać warunki na kanoniczność przekształcenia za pomocą wariacji zmiennych, zamiast ich pochodnych (czy ró.zniczek). Korzystając z wyprowadzonych wyżej relacji

$$\sum_l (p_l \delta q_l - P_l \delta Q_l) = \sum_l (\frac{\partial W}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial W}{\partial Q_l} \delta Q_l) = \delta W, \quad (15)$$

lub

$$\sum_l (p_l \delta q_l + Q_l \delta P_l) = \sum_l (\frac{\partial S}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial S}{\partial P_l} \delta P_l) = \delta S, \tag{16}$$

lub, korzystając z tego, że $\delta W(q, Q, t) = \delta\Phi(Q, P(q, Q, t), t)$,

$$\sum_l (p_l \delta q_l - P_l \delta Q_l) = \delta\Phi(Q, P, t). \tag{17}$$

Okazuje się, że w tej ostatniej postaci daje się przedstawić warunek konieczny i dostateczny kanoniczności przekształcenia.

Przekształcenia kanoniczne tworzą grupę.

1. złożenie dwóch przekształceń kanonicznych jest przekształceniem kanonicznym. Przejdźmy od zmiennych (q, p) do zmiennych (Q', P'), a następnie do zmiennych (Q, P). Z kanoniczności wynika

$$\sum_l (p_l \delta q_l - P'_l \delta Q'_l) = \delta\Phi_1,$$
$$\sum_l P'_l \delta Q'_l - P_l \delta Q_l) = \delta\Phi_2 \tag{18}$$

Po dodaniu tych relacji otrzymujemy

$$\sum_l (p_l \delta q_l - P_l \delta Q_l) = \delta(\Phi_1 + \Phi_2). \tag{19}$$

Funkcja tworząca dla złożenia transformacji jest sumą funkcji tworzących obu transformacji.

2. Łączność składania transformacji wynika z łączności dodawania funkcji tworzących.

3. Transformacja tożsamościowa jest kanoniczna, bo $\sum_l (p_l \delta q_l - p_l \delta q_l) = 0$, a więc funkcją tworzącą jest $\Phi \equiv 0$.

4. Transformacja odwrotna do kanonicznej jest kanoniczna, bo jeśli $\sum_l (p_l \delta q_l - P_l \delta Q_l) = \delta\Phi$, to $\sum_l (P_l \delta Q_l - p_l \delta q_l) = \delta(-\Phi)$. Funkcja tworząca dla transformacji odwrotnej jest funkcją tworzącą dla transformacji prostej, wziętą z przeciwnym znakiem.

Transformacja kanoniczna zachowuje nawiasy Poissona, tzn.

$$\{F, G\} = \sum_l (\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial G}{\partial q_l} \frac{\partial F}{\partial p_l}) = \sum_l (\frac{\partial F}{\partial Q_l} \frac{\partial G}{\partial P_l} - \frac{\partial G}{\partial Q_l} \frac{\partial F}{\partial P_l}) = \{F, G\}'. \tag{20}$$

Dowód jest żmudny i nie będzie tu przeprowadzony. Można go znaleźć w podręczniku Rubinowicza.

Ewolucja układu hamiltonowskiego od (q_0, p_0) do $(q(t), p(t))$, gdzie $q_{l0} = q_l(t_0)$, $p_{l0} = p_l(t_0)$, może być uważana za transformację kanoniczną:

$$q_l(t) = q_l(q_0, p_0, t), \ \ p_l = p_l(q_0, p_0, t). \tag{21}$$

Zbadajmy

$$\begin{aligned}
&\sum(p_l\delta q_l - p_{l0}\delta q_{l0}) = \sum_l p_l \delta q_l|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}\sum_l p_l\delta q_l dt = \int_{t_0}^t \sum_l(\dot{p}_l\delta q_l + p_l\delta\dot{q}_l)dt \\
&= \int_{t_0}^t \sum_l(\frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta\dot{q}_l)dt = \int_{t_0}^t \delta L dt = \delta\int_{t_0}^{t_1} L dt.
\end{aligned} \tag{22}$$

Funkcją tworzącą jest więc działanie $W(q_0, p_0, t) = \int_{t_0}^t L(q(q_0, p_0, t), p(q_0, p_0, t), t)dt$.

1.2 Przykłady przekształceń kanonicznych

1. Przekształcenie w dwuwymiarowej przestrzeni fazowej

$$\begin{aligned}
q &= P \\
p &= -Q.
\end{aligned} \tag{23}$$

Badamy $p\dot{q} - P\dot{Q} = -Q\dot{P} - P\dot{Q} = \frac{d}{dt}(-PQ)$. Zatem istnieje funkcja tworząca $\Phi(Q, P) = -PQ$, czyli przekształcenie jest kanoniczne. Warto zwrócić uwagę, że to, które ze zmiennych kanonicznych są współrzędnymi, a które pędami, jest do pewnego stopnia umowne. Minus w powyższej transformacji jest kluczowy; bez niego transformacja nie byłaby kanoniczna.

2. Rozważmy ogólniejszą transforemację

$$\begin{aligned}
q &= \alpha Q + \beta P, \\
p &= \gamma Q + \epsilon P.
\end{aligned} \tag{24}$$

Badamy wyrażenie

$$\begin{aligned}
&p\dot{q} - P\dot{Q} = (\gamma Q + \epsilon P)(\alpha\dot{Q} + \beta\dot{P}) - P\dot{Q} = \qquad (25) \\
&\alpha\gamma Q\dot{Q} + \beta\gamma Q\dot{P} + (\alpha\epsilon - 1)P\dot{Q} + \beta\epsilon P\dot{P} = \frac{d}{dt}\Phi(Q, P) = \frac{\partial\Phi}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial\Phi}{\partial P}\dot{P}.
\end{aligned}$$

Porównując wyrazy przy pochodnych otrzymujemy warunki

$$\alpha\gamma Q + (\alpha\epsilon - 1)P = \frac{\partial\Phi}{\partial Q},$$
$$\beta\gamma Q + \beta\epsilon P = \frac{\partial\Phi}{\partial P}. \tag{26}$$

Scałkujmy jedno z równań, np. drugie, po P, pamiętając, że stała pojawiają się przy całkowaniu po jednej zmiennej może zależeć od drugiej

$$\beta\gamma QP + \beta\epsilon\frac{1}{2}P^2 + C(Q) = \Phi. \tag{27}$$

Wstawiając ten wynik do pierwszego z równań otrzymujemy

$$\alpha\gamma Q + (\alpha\epsilon - 1)P = \beta\gamma P + \frac{d}{dQ}C. \tag{28}$$

Równanie to może być spełnione, gdy $(\alpha\epsilon - 1) = \beta\gamma$ i to jest warunek kanoniczności przkształcenia. Funkcja $C(Q)$ ma postać $C(Q) = \alpha\gamma\frac{1}{2}Q^2 + C_0$, gdzie C_0 jest już stałą niezależną od P ani Q, cała funkcja tworząca ma postać

$$\Phi(Q,P) = \beta\epsilon\frac{1}{2}P^2 + \alpha\gamma\frac{1}{2}Q^2 + +\beta\gamma PQ + C_0. \tag{29}$$

3. Rozważmy przekształcenie nieliniowe

$$q = \sqrt{Q}\cos 2P,$$
$$p = \sqrt{Q}\sin 2P. \tag{30}$$

Badamy wyrażenie

$$p\dot{q} - P\dot{Q} = \sqrt{Q}\sin 2P(\frac{1}{2\sqrt{Q}}\dot{Q}\cos 2P - \sqrt{Q}\sin 2P2\dot{P}) - P\dot{Q} =$$
$$\dot{Q}(\frac{1}{4}\sin 4P - P) - \dot{P}Q2\sin^2 2P = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial\Phi}{\partial P}\dot{P}. \tag{31}$$

Muszą być spełnione równania

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Q} = \frac{1}{4}\sin 4P - P,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial P} = -2Q\sin^2 2P. \tag{32}$$

Całkując pierwsze równanie po dQ otrzymujemy

$$\Phi = Q(\frac{1}{4}\sin 4P - P) + C(P). \tag{33}$$

Wstawiając ten wynik do drugiego równania dostaje się

$$Q(\cos 4P - 1) + \frac{dC(P)}{dP} = -2Q\sin^2 2P. \tag{34}$$

Ze względu na tożsamość trygonometryczną obie strony ostatniej relacji są równe dla $C(P) = const$. Przekształcenie jest więc kanoniczne.

4. Rozważmy z kolei przekształcenie

$$\begin{aligned} q &= -Q\mathrm{ctgP}, \\ p &= \log\cos P \end{aligned} \tag{35}$$

Zbadajmy teraz wyrażenie inne niż poprzednio. Jeśli $p\dot{q} - P\dot{Q} = \frac{d\Phi}{dt}$ to po odjęciu od obu stron $\frac{d}{dt}(pq)$ otrzymamy $-q\dot{p} - Q\dot{P} = \frac{d}{dt}(\Phi - pq)$; $\Phi - pq$ to też jest dobra funkcja tworząca.

$$-q\dot{p} - P\dot{Q} = Q\mathrm{ctgP}\frac{-\sin\mathrm{P}}{\cos\mathrm{P}}\dot{\mathrm{P}} - \mathrm{P}\dot{\mathrm{Q}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{PQ}). \tag{36}$$

Istnieje funkcja tworząca, przekształcenie jest więc kanoniczne. Szukanie funkcji tworzącej dla $p\dot{q} - P\dot{Q}$ też byłoby poprawne, lecz całki i funkcja byłyby bardziej skomplikowane.

2 Równanie Hamiltona-Jacobiego

Równania Hamiltona stanowią układ $2f$ równań różniczkowych pierwszego rzędu, a ich rozwiązanie jest na ogół kłopotliwe. Można przerzucić trudność na znalezienie przekształcenia kanonicznego do takich zmiennych, w których rozwiązanie jest proste. Równanie Hamiltona-Jacobiego jest równaniem różniczkowym cząstkowym na funkcję tworzącą takiego przekształcenia.

Niech równania Hamiltona w wyjściowych zmiennych (q, p) mają typową postać

$$\begin{aligned} \dot{q}_l &= \frac{\partial H}{\partial p_l}, \\ \dot{p}_l &= -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \end{aligned} \tag{37}$$

z pewnym hamiltonianem $H(q,p,t)$. Celem jest znalezienie przekształcenia kanonicznego prowadzącego do zmiennych (Q,P), takich że nowy hamiltonian $\bar{H}(Q,P) \equiv 0$.

W nowych zmiennych równania Hamiltona się trywializują

$$\begin{aligned} \dot{Q}_l &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_l} = 0, \\ \dot{P}_l &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_l} = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

a więc rozwiązania są $Q_l = \alpha_l = const.$, $P_l = \beta_l = const.$, $l = 1, 2, ..., f$.

Aby znaleźć przekształcenie i jego funkcję tworzącą wykorzystamy wyprowadzone wyżej związki

$$p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S}{\partial P_l}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad S = S(q,P,t). \tag{39}$$

Poszukiwany warunek na funkcję tworzącą S przybiera więc postać

$$H(q_1, ..., q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_f}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{40}$$

Ostatnie równanie nazywa się równaniem Hamiltona-Jacobiego.

Rozwiązanie ogólne równania cząstkowego pierwszego rzędu $f+1$ zmiennych, tzn, $(q_1, ..., q_f, t)$, zawiera $f+1$ stałych. Równanie zawiera tylko pochodne funkcji S, a więc jedna stała jest addytywna i nie będzie tu istotna. Pozostałe stałe to $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_f$. Relacja $Q_l = \frac{\partial S}{\partial P_l}$ przybiera postać

$$\alpha_l = \frac{\partial S(q_1, ..., q_f, \beta_1, ..., \beta_f, t)}{\partial \beta_l}. \tag{41}$$

Te ostatnie relacje, w liczbie f, stanowią poszukiwane rozwiązania $q_l = q_l(t)$, dane w postaci uwikłanej. Ważne jest, aby stałe β_l dały się wyznaczyć przez odwrócenie ostatnich relacji, co wymaga, aby wyznacznik $|\frac{\partial^2 S}{\partial q_l \partial \beta_s}| \neq 0$.

Relacje

$$p_l = \frac{\partial S(q_1, ..., q_f, \beta_1, ..., \beta_f, t)}{\partial q_l} \tag{42}$$

przedstawiają zależność pędów uogólnionych od czasu.

Jeśli hamiltonian nie zależy od czasu, to można odseparować czas w równaniu Hamiltona-Jacobiego, czyli szukać rozwiązania w postaci

$$S(q_1, ..., q_f, \beta_1, ..., \beta_f, t) = S_0(q_1, ..., q_f, \beta_1, ..., \beta_f) - Et, \tag{43}$$

gdzie E jest stałą o mianie energii; nie jest nową stałą, lecz musi wyrażać się przez stałe β_l, a może być jedną z nich. Równanie Hamiltona-Jacobiego przybiera postać

$$H(q_1, ..., q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S_0}{\partial q_f}) = E. \tag{44}$$

Wtedy rozwiązania daje się zapisać w postaci

$$\alpha_l + \frac{\partial E}{\partial \beta_l} t = \frac{\partial S_0(q_1, ..., q_f, \beta_1, ..., \beta_f)}{\partial \beta_l}. \tag{45}$$

Jeśli któraś ze współrzędnych, np, q_1, jest cykliczna, czyli hamiltonian od niej nie zależy, też można wykonać sperację tej zmiennej

$$S_0(q_1, ..., q_f, \beta_1, ..., \beta_f) = S_1(q_2, ..., q_f, \beta_1, ..., \beta_f) + \beta_1 q_1. \tag{46}$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego już po separacji czasu ma postać

$$H(q_2, ..., q_f, \beta_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S_1}{\partial q_f}) = E. \tag{47}$$

Otrzymujemy wtedy rozwiązania

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \frac{\partial S_1}{\partial \beta_l} - \frac{\partial E}{\partial \beta_l} t, \;\; p_l = \frac{\partial S_1}{\partial \beta_l}, \;\; l = 2, 3, ..., f \\ \alpha_1 &= \frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} + q_1 - \frac{\partial E}{\partial \beta_1} t, \;\; p_1 = \beta_1, \;\; l = 1. \end{aligned} \tag{48}$$

2.1 Przykład oscylator harmoniczny

Hamiltonian ma postać

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2. \tag{49}$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego przybiera postać

$$\frac{1}{2m} (\frac{dS_0}{dx})^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = E, \tag{50}$$

gdzie $E = \beta_1$ jest jedyną stałą.

Zatem

$$\frac{dS_0}{dx} = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2}, \tag{51}$$

a

$$S_0 = \pm\int\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2}dx \tag{52}$$

Nie ma potrzeby wyliczania ostatniej całki. Zachodzi natomiast

$$\alpha + \frac{\partial E}{\partial E}t = \frac{\partial S_0}{\partial E} = \pm\int\frac{2m}{2\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2}}dx, \tag{53}$$

czyli

$$\alpha + t = \pm\frac{1}{\omega}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}} = \pm\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{2mE}{m^2\omega^2}}}, \tag{54}$$

czyli

$$x = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin\omega(t+\alpha). \tag{55}$$

Otrzymano więc inną metodą dobrze znane rozwiązanie.

2.2 Zagadnienie dwóch ciał

Po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych dla ruchu względnego hamiltonian ma postać

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\phi^2) + \frac{\alpha}{r}. \tag{56}$$

(α jest współczynnikiem w potencjale grawitacyjnym lub kulombowskim, nie mylić ze stałymi α_l). Równanie Hamiltona-Jacobiego ma postać

$$\frac{1}{2\mu}[(\frac{\partial S_0}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial S_0}{\partial \phi})^2] + \frac{\alpha}{r} = E. \tag{57}$$

Energia pełni rolę stałej $E = \beta_2$.

W hamiltonianie jest zmienna cykliczna ϕ. Można dokonać separacji biorąc

$$S_0(r,\phi,\beta_1\beta_2) = S_1(r,\beta_1\beta_2) + \beta_2\phi. \tag{58}$$

Otrzymamy wtedy równanie

$$\frac{1}{2\mu}[(\frac{dS_1}{dr})^2 + \frac{\beta_2^2}{r^2}] + \frac{\alpha}{r} = E. \tag{59}$$

Zatem

$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2\mu(E - \frac{\alpha}{r}) - \frac{\beta_2^2}{r^2}}, \tag{60}$$

czyli

$$S_1 = \int \sqrt{2\mu(E - \frac{\alpha}{r}) - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr. \tag{61}$$

Rozwiązania otrzymujemy jako

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + t &= \frac{\partial S_1}{\partial E} = \int \frac{2\mu}{2\sqrt{\mu(E - \frac{\alpha}{r}) - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} dr, \\
\alpha_2 &= \frac{\partial S_0}{\partial \beta_2} = \phi + \int \frac{\frac{-2\beta_2}{r^2}}{2\sqrt{2\mu(E - \frac{\alpha}{r}) - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} dr, \\
p_r &= \frac{\partial S_0}{\partial r} = \int \frac{-2\mu\frac{-\alpha}{r^2} + \frac{2\beta_2^2}{r^3}}{2\sqrt{2\mu(E - \frac{\alpha}{r}) - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} dr, \\
p_\phi &= \frac{\partial S_0}{\partial \phi} = \beta_2.
\end{aligned} \tag{62}$$

Ostatnia z powyższych relacji identyfikuje stałą β_2 z momentem pędu J_z^S.

Całki w tych równaniach można wykonać, uzyskując wyniki otrzymane wcześniej inną metodą. Szczegóły rachunkowe można znaleźć w podręczniku Rubinowicza.

2.3 Rachunek zaburzeń

Równanie Hamiltona-Jacobiego stwarza możliwości przybliżonego rozwiązywania równań ruchu. Niech hamiltonian składa się z dwóch części

$$H = H_0(q, p, t) + H_1(q, p, t), \tag{63}$$

gdzie H_1 jest w pewnym sensie "mały". Niech znane będzie rozwiązanie ogólne równania Hamiltona-Jacobiego dla hamiltonianu H_0

$$H_0(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{64}$$

$(q = (q_1, ..., q_f)$, $\frac{\partial S}{\partial q} = (\frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_f}))$. Zachodzi $S = S(q, \beta, t)$, $p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l}$, $\alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \beta_l}$, rozwiązania daje się zapisać jako $q_l = q_l^0(\alpha, \beta, t)$, $p_l = p_l^0(\alpha, \beta, t)$.

Wprowadzenie H_1 powoduje, że dotychczasowe stałe α_l i β_l stają się funkcjami czasu (tzw. procedura uzmienniania stałych). Transformacja kanoniczna do teraz już zmiennych α_j i β_j prowadzi do hamiltonianu

$$\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + H_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_1. \tag{65}$$

Funkcje $\alpha_l(t)$ i $\beta_l(t)$ spełniają równania Hamiltona

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_l &= \frac{\partial H_1}{\partial \beta_l}, \\ \dot{\beta}_l &= -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_l}, \end{aligned} \tag{66}$$

gdzie $H_1 = H_1(q^0(\alpha, \beta, t), p^0(\alpha, \beta, t), t)$.

Jeśli H_1 jest "małe", to funkcje α_l i β_l są wolnozmienne i można je w przybliżeniu zastąpić przez ich wartości początkowe $\alpha_{l0} = \alpha_l(t_0)$ i $\beta_{l0} = \beta_l(t_0)$. Rozwiązywanie równań sprowadza się wtedy do obliczania całek ze znanych funkcji

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \alpha_{l0} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial H_1(q^0(\alpha_0, \beta_0, t), p^0(\alpha_0, \beta_0, t), t)}{\partial \beta_{l0}} dt, \\ \beta_l &= \beta_{l0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial H_1(q^0(\alpha_0, \beta_0, t), p^0(\alpha_0, \beta_0, t), t)}{\partial \alpha_{l0}} dt, \end{aligned} \tag{67}$$

Przykład: zaburzony oscylator harmoniczny

Niech hamiltonian ma postać

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \gamma x^4. \tag{68}$$

Potencjał harmoniczny został więc zaburzony wyrazem $H_1 = \gamma x^4$.

Rozwiązanie równań Hamiltona w nieobecności zaburzenia podano wyżej

$$x^0 = \sqrt{\frac{2\beta}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \alpha), \tag{69}$$

gdzie energię E oznaczono jako β, jak w ogólnej teorii.

Po wprowadzeniu zaburzenia dotychczasowe stałe α i β stają się zmiennymi, spełniającymi równania Hamiltona

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\beta}\gamma[\sqrt{\frac{2\beta}{m\omega^2}}\sin(\omega t+\alpha)]^4 = \gamma\frac{8\beta}{m^2\omega^4}\sin^4(\omega t+\alpha), \tag{70}$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\gamma[\sqrt{\frac{2\beta}{m\omega^2}}\sin(\omega t+\alpha)]^4 = -\gamma\frac{4\beta^2}{m^2\omega^4}4\sin^3(\omega t+\alpha)\cos(\omega t+\alpha).$$

Przybliżenie polega na tym, że zastępuje się wolnozmienne funkcje $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ po prawej stronie przez ich wartości początkowe α_0 i β_0. Wtedy można wykonać całkowanie

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t}\gamma\frac{8\beta_0}{m^2\omega^4}\sin^4(\omega t+\alpha_0)dt, \tag{71}$$

$$\beta(t) = \beta_0 - \int_{t_0}^{t}\gamma\frac{4\beta_0^2}{m^2\omega^4}4\sin^3(\omega t+\alpha_0)\cos(\omega t+\alpha_0)dt.$$

Możliwe są kolejne przybliżenia, które polegają na tym że funkcje $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ policzone w poprzednim kroku wstawia się po prawej stronie równań Hamiltona. Pozostaje trudność obliczania coraz bardzie skomplikowanych całek, ale nie ma równań różniczkowych do rozwiązania.

3 Trajektorie w przestrzeni fazowej i rozwiązywalność równań

3.1 Proste trajektorie

W prostych przypadkach można łatwo zanalizować kształt trajektorii.

1. Oscylator harmoniczny

Rozwiązania równania ruchu są

$$x(t) = A\sin(\omega t+\psi),$$

$$p(t) = m\dot{x} = Am\omega\cos(\omega t+\psi), \tag{72}$$

gdzie A jest amplitudą, a ψ - fazą początkową. Z powyższych rozwiązań można wyrugować czas, otrzymując równanie trajektorii

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{A^2 m^2 \omega^2} = 1. \tag{73}$$

W układzie współrzędnych (xp) trajektorią jest elipsa. Ponieważ masa i częstość oscylatora są ustalone, jedynym parametrem jest amplituda A, określona przez energię $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$. Amplituda, a więc energia określają rozmiary elipsy.

2. Wahadło matematyczne

Niech, jak poprzednio, ϕ jest odchyleniem od pionu, m jest masą, a l - długością. Lagranżjan ma postać

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi. \tag{74}$$

Pęd uogólniony $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}$. Hamiltonian jest energią i ma postać

$$\frac{p_\phi^2}{2ml^2} - mgl\cos\phi = E. \tag{75}$$

Można stąd wyliczyć pęd

$$p_\phi = \pm\sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\phi)}. \tag{76}$$

W zależności od wartości energii trajektoria w układzie współrzędnych (ϕp_ϕ) jest nieograniczona dla $E > -mgl$ (wszystkie kąty są dozwolone), lub ograniczona dla małych energii (dozwolone tylko kąty, dla których wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne).

Dla najmniejszych energii, gdy dozwolone są tylko tak małe kąty, że $\cos\phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$, czyli w przybliżeniu małych drgań, trajektoria przechodzi w elipsę. Dla bardzo dużych energii p_ϕ jako funkcja ϕ przypomina prostą, na której są tylko nieznaczne zafalowania. W granicznym przypadku $E = mgl$ trajektoria $p_\phi = \pm\sqrt{2ml^2 mgl}\cos\frac{\phi}{2}$; jest to tak zwana separatrysa, a punkt $\phi = \pi$ jest punktem stałym.

3.2 Oscylator harmoniczny - zmienne działanie-kąt

Popatrzmy na funkcje reprezentujące rozwiązania dla oscylatora harmonicznego jak na przekształcenie kanoniczne od zmiennych (x, p) do zmiennych (J, ϕ)

$$x = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}} \sin \phi,$$
$$p = \sqrt{2Jm\omega} \cos \phi. \tag{77}$$

J gra rolę pędu, a ϕ - współrzędnej. Kanoniczność przekształcenia można sprawdzić, badając

$$p\dot{x} - J\dot{\phi} = \sqrt{2Jm\omega} \cos \phi (\sqrt{\frac{2}{m\omega}} \frac{1}{2\sqrt{J}} \dot{J} \sin \phi + \sqrt{\frac{2J}{m\omega}} \cos \phi \dot{\phi}) - J\dot{\phi} =$$
$$\dot{J} \frac{1}{2} \sin 2\phi + \dot{\phi} J \cos 2\phi = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} J \sin 2\phi. \tag{78}$$

Istnieje funkcja tworząca, przekształcenie jest więc kanoniczne. Funkcja tworząca nie zależy od czasu, więc

$$\bar{H} = H = \frac{1}{2m} 2Jm\omega \cos^2 \phi + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{2J}{m\omega} \sin^2 \phi = J\omega. \tag{79}$$

Nowe współrzędne spełniają równania Hamiltona w wyjątkowo prostej postaci

$$\dot{J} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} = 0.$$
$$\dot{\phi} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial J} = \omega, \tag{80}$$

czyli $\phi = \omega t + \psi$, a J jest stałą ruchu. Istotnie, $\bar{H} = E = J\omega$. Wielkość J nazywa się działaniem, choć nie jest tym samym działaniem, które było zdefiniowane wcześniej.

3.3 Dwa niezależne oscylatory harmoniczne

Hamiltonian ma postać

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2} m_2 \omega_2^2 x_2^2. \tag{81}$$

Oscylatory nie są sprzężone, gdyż hamiltonian jest sumą składników, których każdy zależy tylko od zmiennych jednego oscylatora. Rozwiązania równań Hamiltona otrzymuje się niezależnie dla obu oscylatorów

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1), \\ p_1(t) &= A_1 m_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1), \\ x_2(t) &= A_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2), \\ p_2(t) &= A_2 m_2 \omega_2 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \end{aligned} \tag{82}$$

Możemy napisać dwie niezależne stałe ruchu będące energią pierwszego oscylatora $E_1 = \frac{1}{2}m_1\omega_1^2 A_1^2$ i całkowitą energią $E = \frac{1}{2}m_1\omega_1^2 A_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2 A_2^2$. Mamy

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{m_1\omega_1^2 x_1^2}{2} = E_1, \tag{83}$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{m_1\omega_1^2 x_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_2\omega_2^2 x_2^2}{2} = E, \tag{84}$$

Drugie równanie opisuje trójwymiarową elipsoidę zanurzoną w przestrzeni czterowymiarowej, a pierwsze - trójwymiarowy walec o przekroju eliptycznym i dwuwymiarowej tworzącej. Układ porusza się więc w przestrzeni fazowej po dwuwymiarowej powierzchni będącej przecięciem tych hiperpowierzchni. Ruch jest periodyczny, jeśli częstości są liczbami współmiernymi, tzn. istnieją liczby naturalne n_1 i n_2, takie że $n_1\omega = n_2\omega_2$. Wtedy po czasie $\tau = \frac{2\pi n_2}{\omega_1} = \frac{2\pi n_1}{\omega_2}$ oscylatory znajdą się w takiej samej fazie, jak w $t = 0$. Ruch jest więc okresowy, a trajektoria się zamyka.

Jeśli częstości nie są współmierne trajektoria się nie zamyka. Przechodzi natomiast dowolnie blisko dowolnego punktu na hiperpowierzchni wyznaczonej przez więzy, czyli jest gęsta na tej hiperpowierzchni. Taki ruch nazywa się quasi-okresowym.

Wprowadzenie zmiennych działanie-kąt pozwal patrzeć na ruch jako odbywający się po f-wymiarowym torusie.

3.4 Uwagi ogólne

Własności układu 2 oscylatorów harmonicznych okazują się reprezentatywne dla dużej klasy układów.

Układ równań różniczkowych, w szczególności równań Hamiltona, nazywa się całkowalnym w kwadraturach, jeśli jego rozwiązania można otrzymać przez skończoną liczbę operacji algebraicznych oraz całkowanie znanych funkcji.

Warunek dostateczny całkowalności jest dany przez twierdzenie Liouville'a-Arnolda, podane tu bez dowodu i pełnej ścisłości. Mówi ono, że układ równań Hamiltona jest całkowany przez kwadratury, jeśli istnieje f niezależnych całek (stałych) ruchu (jedną jest energia), których dla każdej pary nawias Poissona jest równy zero.

Trajektorie leżą na f-wymiarowej hiperpowierzchni. Jeśli są ograniczone, to są okresowe lub quasi-okresowe. Można je charakteryzować jako leżące na odkształconych torusach.

Inaczej warunek ten można sformułować, że istnieje transformacja do nowych zmiennych kanonicznych (J_l, ϕ_l) typu działanie-kąt, czyli takich, że $\dot{J}_l = 0$, $\dot{\phi}_l = \omega_l(J_1, ..., J_f)$.

Dla $f = 1$ jest jedna stała ruchu - energia i układ jest całkowalny.

Na ogół znajdowanie kompletu stałych ruchu jest trudne.

Na ogół układy hamiltonowskie nie są całkowalne. Jeśli układ nie jest całkowalny, trajektorie nie są na ogół ani okresowe ani quasi-okresowe. Ruchu nie można sprowadzić do odbywającego się po wielowymiarowym, odkształconym torusie.

Układy fizyczne, w szczególności hamiltonowskie, mogą wykazywać zjawisko chaosu deterministycznego. Polega ono na specjalnej wrażliwości na warunki początkowe: trajektorie układów startujących z warunków początkowych nieznacznie się różniących bardzo szybko się rozbiegają i układy te zachowują się jakościowo zupełnie inaczej.

Prawdziwe jest również twierdzenie Poincarégo o powrocie: jeśli obszar w przestrzeni fazowej jest ograniczony, to dla wszystkich układów hamiltonowskich po dostatecznie długim czasie układ wróci dowolnie blisko stanu początkowego.