Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.8

1 Mechanika hamiltonowska 1

Równania Lagrange'a II rodzaju stanowią układ f równań drugiego rzędu. Można je napisać w postaci $2f$ równań pierwszego rzędu traktując $\dot{q}_l$ jako niezależną zmienną v_l

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \\ &\frac{dq_l}{dt} = v_l \\ &L = L(q, v, t), \quad l = 1, 2, ..., f. \end{aligned} \tag{1}$$

Okazuje się, że zamiast współrzędnych i prędkości bardziej korzystne jest potraktowanie jako zmiennych niezależnych współrzędnych i pędów. Oznacza to, że z relacji $p_l = \frac{\partial L}{\partial v_l}$ można wyliczyć prędkości. To jest możliwe przy założeniu, że wyznacznik macierzy $|\frac{\partial p_l}{\partial v_s}| = |\frac{\partial^2 L}{\partial v_l \partial v_s}| \neq 0$.

Weźmy funkcję

$$H(q, p, t) = \sum_l p_l v_l(q, p, t) - L(q, v(q, p, t), t), \tag{2}$$

zwaną funkcją Hamiltona lub hamiltonianem. Jest to funkcja G z wcześniejszego rozdziału, w której prędkości wyrażono przez współrzędne i pędy. Przy założeniach, że współrzędne uogólnione wprowadzono w sposób niezależny od czasu i że istnieje energia potencjalna, jest to energia całkowita układu.

Obliczmy pochodną

$$\frac{\partial H}{\partial q_s} = \sum_l p_l \frac{\partial v_l}{\partial q_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - \sum_l \frac{\partial L}{\partial v_l}\frac{\partial v_l}{\partial q_s} = -\frac{\partial L}{\partial q_s} = -\dot{p}_s, \tag{3}$$

gdzie skorzystano z tego, że $\frac{\partial L}{\partial v_l} = p_l$ oraz z równania Lagrange'a dla zmiennej q_s.

Podobnie obliczmy

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = \sum_l (\frac{\partial p_l}{\partial p_s} v_l + p_l \frac{\partial v_l}{\partial p_s}) - \sum_l \frac{\partial L}{\partial v_l} \frac{\partial v_l}{\partial p_s} = v_s = \dot{q}_s, \tag{4}$$

gdzie skorzystano z tego, że $p_l = \frac{\partial L}{\partial v_l}$.

Otrzymany układ $2f$ równań pierwszego rzędu

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s},$$
$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \tag{5}$$

nosi nazwę równań kanonicznych Hamiltona.

Przy założeniu, że funkcja Hamiltona jest dostatecznie regularna, rozwiązania równań Hamiltona przy zadanych warunkach początkowych $q_l(t_0) = q_{l0}$ i $p_l(t_0) = p_{l0}$, $l = 1, 2, ..., f$, mają rozwiązania i są one jednoznaczne.

Punkt o $2f$ współrzędnych $(q_1, ..., q_f, p_1, ...p_f)$ określa stan układu punktów materialnych, a przestrzeń $2f$ - wymiarowa, złożona z takich punktów nazywa się przestrznią fazową. Trajektorie w przestrzeni fazowej się nie przecinają, co wynika z jednoznaczności rozwiązań równań Hamiltona.

Z powyższego wyprowadzenia wynika, że z równań Lagrange'a wynikają równania Hamiltona.

Można przeprowadzić rozumowanie w drugą stronę. Niech spełnione będą równania Hamiltona. Z relacji $v_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}$ można wyznaczyć $p_l = p_l(q, v, t)$, jeśli tylko wyznacznik $|\frac{\partial v_l}{\partial p_s}| \neq 0$.

Lagranżjan ma postać

$$L(q, v, t) = \sum_l p_l(q, v, t) v_l - H(q, p(q, v, t), t). \tag{6}$$

Można obliczyć pochodne

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = \sum_l \frac{\partial p_l}{\partial q_s} v_l - \frac{\partial H}{\partial q_s} - \sum_l \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial q_s} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} = \dot{p}_s, \tag{7}$$

gdzie skorzystano z relacji $v_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}$ oraz z równania Hamiltona $-\frac{\partial H}{\partial q_s} = \dot{p}_s$. Podobnie obliczmy pochodną

$$\frac{\partial L}{\partial v_s} = \sum_l (\frac{\partial p_l}{\partial v_s} v_l + p_l \frac{\partial v_l}{\partial v_s}) - \sum_l \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial v_s} = p_s, \tag{8}$$

gdzie skorzystano z tego, że $\frac{\partial H}{\partial p_l} = v_l$. Otrzymano więc równania Lagrange'a w postaci

$$\dot{p}_s = \frac{\partial L}{\partial q_s},$$
$$\dot{q}_s = \frac{\partial L}{\partial p_s} = v_s \tag{9}$$

Z równań Hamiltona wynikają więc równania Lagrange'a.

Jeśli hamiltonian nie zależy od pewnej współrzędnej q_j, to $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$, zatem pęd związany z tą współrzędną jest stałą ruchu. Taką współrzędną nazywamy cykliczną.

1.1 Punkt materialny bez więzów, współrzędne kartezjańskie

Lagranżjan ma postać

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z, t). \tag{10}$$

Pędy uogólnione, w tym przypadku tożsame z kinetycznymi, są: $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$. Należy prędkości wyrazić przez pędy: $\dot{x} = \frac{1}{m}p_x$, $\dot{y} = \frac{1}{m}p_y$, $\dot{z} = \frac{1}{m}p_z$. Hamiltoniam ma postać

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = \tag{11}$$
$$p_x\frac{p_x}{m} + p_y\frac{p_y}{m} + p_z\frac{p_z}{m} - \frac{m}{2}(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{p_z^2}{m^2}) + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V.$$

Hamiltonian jest więc energią całkowitą. Równania Hamiltona mają więc postać

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \tag{12}$$
$$\dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{13}$$

i analogicznie dla zmiennych y i z.Otrzymano równania równoważne równaniom Newtona.

1.2 Naładowana cząstka w pole elektromagnetycznym

Jak pokazano wyżej, lagranżjan dla cząstki o masie m i ładunku Q ma postać

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - Q\phi + Q\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}. \tag{14}$$

Pęd uogólniony ma postać $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + Q\mathbf{A}$, a więc prędkość wyraża się jako $\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - Q\mathbf{A}$.

Hamiltonian należy więc napisać jako

$$H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \mathbf{p}\frac{1}{m}(\mathbf{p} - Q\mathbf{A}) - \frac{m}{2}\frac{1}{m^2}(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 + Q\phi - Q\mathbf{A}\frac{1}{m}(\mathbf{p} - Q\mathbf{A}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 + Q\phi. \tag{15}$$

W tym przypadku nie ma energii potencjalnej, hamiltonian nie jest więc energią.

1.3 Cząstka bez więzów, współrzędne kuliste

Lagranżjan i pędy uogólnione obliczone były wcześniej

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi). \tag{16}$$

Współrzędnym kulistym odpowiadają pędy uogólnione

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{17}$$

Hamiltonian jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej. Należy tylko wyrazić prędkości uogplnione przez pędy. Otrzymuje się

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}) + V. \tag{18}$$

Jeśli $V = V(r)$, hamiltonian nie zależy od ϕ, zatem ϕ jest zmienną cykliczną, p_ϕ jest wielkością zachowaną (jest tożsame z J_z).

1.4 Zagadnienie dwóch ciał

Lagranżjan ma postać

$$L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r}. \tag{19}$$

Pędy uogólnione są

$$\begin{aligned} p_r &= \mu\dot{r}, \\ p_\phi &= \mu r^2\dot{\phi} \end{aligned} \tag{20}$$

Hamiltonian jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}) + \frac{\alpha}{r}. \tag{21}$$

Równania Hamiltona mają postać

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu}, \\ \dot{p_r} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{\mu r^2}, \\ \dot{p_\phi} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

1.5 Małe drgania

Dla pewnego układu wykonujęcego małe drgania lagranżjan ma postać

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 4\dot{x}\dot{y} + 5\dot{y}^2) - \frac{1}{2}(3x^2 + 2xy + y^2). \tag{23}$$

Łatwo sprawdzić, że równania Lagrange'a mają postać

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\ddot{y} + 3x + y = 0, \\ 2\ddot{x} + 5\ddot{y} + x + y = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Pędy uogólnione są

$$\begin{aligned} p_x &= \dot{x} + 2\dot{y}, \\ p_y &= 2\dot{x} + 5\dot{y}. \end{aligned} \tag{25}$$

Prędkości wyrażają się zatem przez pędy jako

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5p_x - 2p_y, \\ \dot{y} &= -2p_x + p_y. \end{aligned} \tag{26}$$

Hamiltonian ma postać

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L = \frac{1}{2}(5p_x^2 - 4p_xp_y + p_y^2) + \frac{1}{2}(3x^2 + 2xy + y^2). \tag{27}$$

Równania Hamiltona mają postać

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5p_x - 2p_y, \\ \dot{y} &= -2p_x + p_y, \\ \dot{p_x} &= -(3x + y), \\ \dot{p_y} &= -(x + y). \end{aligned} \tag{28}$$

1.6 Ruch po powierzchni stożka w polu grawitacujnym

Oś stożka ustawiona jest pionowo i ma kierunek osi z. Równanie więzów jest $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$. Przyjmijmy współrzędne uogólnione: z oraz kąt ϕ obrotu wokół osi z.

Współrzędne kartezjańskie wyrażają się przez uogólnione

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x^2 + y^2}\cos\phi = az\cos\phi, \\ y &= \sqrt{x^2 + y^2}\sin\phi = az\sin\phi. \end{aligned} \tag{29}$$

Prędkości uogólnione są

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\dot{z}\cos\phi - az\sin\phi\dot{\phi}, \\ \dot{y} &= a\dot{z}\sin\phi + az\cos\phi\dot{\phi}. \\ &\dot{z} \end{aligned} \tag{30}$$

Lagranżjan ma postać

$$L = \frac{m}{2}((a^2+1)\dot{z}^2 + a^2 z^2 \dot{\phi}^2) - mgz. \tag{31}$$

Równania Lagrange'a mają postać

$$\begin{aligned} &m(a^2+1)\ddot{z} - ma^2 z\dot{\phi}^2 + mg = 0, \\ &ma^2(2z\dot{z}\dot{\phi} + z^2\ddot{\phi}) = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

pędy uogólnione są

$$\begin{aligned} p_z &= m(a^2+1)\dot{z}, \\ p_\phi &= ma^2 z^2 \dot{\phi}. \end{aligned} \tag{33}$$

Hamiltonian (jako suma energii kinetycznej i potencjalnej lub policzony z ogólnej definicji) ma postać

$$H = \frac{1}{2m}[\frac{p_z^2}{a^2+1} + \frac{p_\phi^2}{a^2 z^2}] + mgz. \tag{34}$$

Równania Hamiltona mają postać

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{m}\frac{p_z}{a^2+1}, \\ \dot{p_z} &= -(\frac{1}{2m}\frac{-2p_\phi^2}{a^2 z^3} + mg), \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{ma^2 z^2}, \\ \dot{p_\phi} &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

1.7 Zasada wariacyjna dla równań Hamiltona

Poddajmy trajektorię w przestrzeni fazowej wariacji,

$$\begin{aligned} q_l &\to q_l + \delta q_l, \\ p_l &\to p_l + \delta p_l \end{aligned} \tag{37}$$

Współrzędne i pędy są zmiennymi niezależnymi; niezależne są też ich wariacje.

Okazuje się, zė równania Hamiltona są równoważne warunkowi wariacyjnemu

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum_l p_l \dot{q}_l - H) dt = 0, \tag{38}$$

dla $\delta q_l(t_0) = \delta q_l(t_1) = 0$ (nie jest konieczne nałożenie warunków na wariacje pędów, ale będziemy zakładać $\delta p_l(t_0) = \delta p_l(t_1) = 0$).

Dla dowodu warunek wariacyjny można napisać jako

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum_l p_l \dot{q}_l - H) dt = \int_{t_)}^{t_1} [\sum_l (\delta p_l \dot{q}_l + p_l \delta \dot{q}_l) - \sum_l (\frac{\partial H}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta p_l)] dt =$$
$$\int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l}) \delta p_l - (\dot{p}_l + \frac{\partial H}{\partial q_l}) \delta q_l] dt + \sum_l p_l \delta q_l |_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{39}$$

gdzie wykonano całkowanie przez części. Ostatni wyraz zeruje się na mocy założeń o znikaniu δq_l na końcach przedziału czasu.

Jeśli spełnione są równania Hamiltona, to znika funkcja podcałkowa i zeruje się wariacja fukcjonału. Odwrotnie, jeśli zeruje się wariacja funcjonału, to z dowolności wariacji δq_l i δp_l wynika zerowanie się stojących przy tych wariacjach współczynników, a więc spełnione są równania Hamiltona.

Mimo zewnętrznego podobieństwa ta zasada wariacyjna jest różna od zasady Hamiltona: dotyczy trajektorii w innej przestrzeni (tu w przestrzeni fazowej, tam - na hiperpowierzchni więzów.

1.8 Nawiasy Poissona

Nawias Poissona dwóch funkcji określonych na przestrzeni fazowej jest zdefiniowany jako

$$\{F, G\} = \sum_l (\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial G}{\partial q_l} \frac{\partial F}{\partial p_l}). \tag{40}$$

Z tej definicji wynika natychmiast, że

$$\{G, F\} = -\{F, G\}, \tag{41}$$

W szczególności $\{F, F\} = 0$. Z reguł różniczkowania sumy i iloczynu funkcji wynika, że

$$\begin{aligned} \{F_1 + F_2, G\} &= \{F_1, G\} + \{F_2, G\}, \\ \{F_1 F_2, G\} &= F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2. \end{aligned} \tag{42}$$

Prawdziwa jest też tożsamość Jacobiego

$$\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0. \tag{43}$$

Dowód wymaga po prostu obliczenia pochodnych. Oznaczmy roboczo $\frac{\partial F}{\partial q_l} = F_q$ itd. Mamy

$$\begin{aligned}
&\{E, \{F, G\}\} = \{E, F_q G_p - G_q F_p\} = \\
&E_q, (F_q G_p)_p - (F_q G_p)_q E_p - E_q (G_q F_p)_p + (G_q F_p)_q E_p = \\
&E_q (F_{qp} G_p + F_q G_{pp}) - (F_{qq} G_p + F_q G_{pq}) E_p \\
&-E_q (G_{qp} F_p + G_q F_{pp}) + (G_{qq} F_p + G_q F_{pq}) E_p.
\end{aligned} \tag{44}$$

Należy teraz wziąć dwie analogiczne sumy, zamieniając cyklicznie (E, F, G) na (F, G, E) i (G, E, F). Po dodaniu otrzymuje się zero.

Jeśli jedną z funkcji jest współrzędna q_s lub pęd p_s otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\{F, q_s\} &= \sum_l \left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial q_s}{\partial p_l} - \frac{\partial q_s}{\partial q_l}\frac{\partial F}{\partial p_l}\right) = -\frac{\partial F}{\partial p_s}, \\
\{F, p_s\} &= \sum_l \left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial p_s}{\partial p_l} - \frac{\partial p_s}{\partial q_l}\frac{\partial F}{\partial p_l}\right) = \frac{\partial F}{\partial q_s}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Skorzystano z tego, że pochodna jednej zmiennej niezależnej względem drugiej jest r'owna 0, jeśli są to różne zmienne, i 1, jeśli jest to ta sama zmienna.

W szczególności otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\{q_l, q_s\} &= \{p_l, p_s\} = 0, \\
\{q_l, p_s\} &= \delta_{ls}
\end{aligned} \tag{46}$$

Równania Hamiltona dają się zapisać w symetrycznej formie

$$\begin{aligned}
\dot{q}_s &= \{q_s, H\}, \\
\dot{p}_s &= \{p_s, H\}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Pochodną zwykłą funkcji $F(q, p, t)$ względem czasu można zapisać przy pomocy nawiasu Poissona tej funkcji z Hamiltonianem H

$$\frac{dF}{dt} = \sum_l \left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial F}{\partial p_l}\dot{p}_l\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_l \left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial H}{\partial q_l}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{48}$$

Jeśli w szczególności wielkość nie zależy explicite od czasu i jej nawias Poissona z hamiltonianem się zeruje, to jest ona zachowana.

Twierdzenie Poissona-Jacobiego mówi, że nawias Poissona stałych ruchu jest też stałą ruchu. Z założenia

$$\frac{dF_j}{dt} = \{F_j, H\} + \frac{\partial F_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{49}$$

Zbadajmy

$$\begin{aligned} &\frac{d\{F_1, F_2\}}{dt} = \{\{F_1, F_2\}, H\} + \frac{\partial\{F_1, F_2\}}{\partial t} = \\ &-\{\{F_2, H\}, F_1\} - \{\{H, F_1\}, F_2\} + \{\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2\} + \{F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\} = \\ &-\{[\{F_2, H\} + \frac{\partial F_2}{\partial t}], F_1\} + \{[\{F_1, H\} + \frac{\partial F_1}{\partial t}], F_2\} = 0, \end{aligned} \tag{50}$$

gdzie skorzystano z tożsamości Jacobiego i z zachowania wielkości $F_{1,2}$.

W szczególności we współrzędnych kartezjańskich $\{x, y\} = \{p_x, p_y\} = 0$, $\{p_x, p_y\} = 0$, $\{x, p_x\} = 1$, $\{x, p_y\} = 0$, itd. . Dla momentu pędu we współrzędnych kartezjańskich

$$\{J_x, J_y\} = \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} = yp_x\{p_z, z\} + xp_y\{z, p_z\} = J_z. \tag{51}$$

Korzystając z własności nawiasów Poissona wyrażono badany nawias przez 16 prostszych, z czego 14 się zeruje, a napisano tyko 2 różne od zera. Składowe momentu pędu można przestawiać cyklicznie.