Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.7

1 Zagadnienia wariacyjne

1.1 Uwagi o funkcjonałach i ich ekstremach

Funkcjonał jest uogólnieniem pojęcia funkcji. Polega na tym, że funkcji przyporządkowuje się liczbę. Funkcja przechodzi w funkcjonał, gdy liczba zmiennych staje się nieprzeliczalna

$$F(x_1, x_2, ...x_n) \to F[x(t)], \tag{1}$$

gdzie t jest liczbą rzeczywistą. Funkcjonałem specjalnie interesującym nas jest działanie S

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt, \tag{2}$$

gdzie L jest lagranżjanem, $q = (q_1, q_2, ..., q_f)$.

Najważniejszym wynikiem będzie, że zamiast poszukiwać trajektorii jako spełniającej odpowiednie równania różniczkowe, można rozpatrywać rodzinę trajektorii porównawczych i okazuje się, że realizowana jest ta, dla której działanie jest stacjonarne, a przy dodatkowych założeniach minimalne.

Ogólna metoda szukania ekstremum funkcjnału opiera się na podobnych zasadach, jak w przypadku funkcji. Zamieniamy funkcję $q(t)$ na $q^*(t) = q(t) + \delta q(t)$. δq jest wariacją funkcji. W związku z tym zmieni się wartość funkcjonału. Część przyrostu wartości funkcjonału zależną liniowo od δq nazywa się wariacją funkcjonału (jest to analogon różniczki funkcji). Minimum (maksimum) funkcjonału oznacza, że wprowadzenie dowolnej choć niewielkiej wariacji δq powinno skutkować zwiększeniem (zmniejszeniem) wartości funkcjonału. Jeśli o przyroście wartości funkcjonału ma decydować jego wariacja, to zmiana znaku δq spowoduje zmianę znaku przyrostu wartości funkcjonału i nie ma ekstremum. Warunkiem koniecznym (lecz nie dostatecznym) na ekstremum funkcjonału jest zatem zerowanie się jego wariacji (analogicznie jak dla funkcji jednej zmiennej warunkiem jest zerowanie się pochodnej, a dla funkcji wielu zmiennych - zerowanie się wszystkich pochodnych cząstkowych).

Zamiast szukać trajektorii układu punktów materialnych jako rozwiązania równań różniczkowych, można jej szukać w rodzinie trajektorii porównawczych, jako takiej, dla której działanie osiąga minimum (przy pewnych dodatkowych założeniach).

1.2 Zasada Hamiltona

Rozważmy teraz wszystkie trajektorie $q^*(t)$, dostatecznie regularne, prowadzące od punktu $q(t_0)$ do punktu $q(t_1)$. Oznacza to, że $\delta q_l(t_0) = \delta q_l(t_1) = 0$ dla wszystkich $l = 1, 2., ..., f$. Wariacje prędkości $\delta\dot{q}_l = \dot{q}_l^* - \dot{q}_l = \frac{d}{dt}\delta q_l$.

Zbadajmy przyrost działania

$$S[q^*] - S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q^*(t), \dot{q}^*(t), t)dt - \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt$$
$$\approx \int_{t_0}^{t_1} \sum_l (\frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta\dot{q}_l)dt = \delta S[q], \tag{3}$$

gdzie ograniczono się do liniowej części przyrostu funkcjonału. W ostatnim wyrażeniu można przeprowadzić całkowanie przez części

$$\delta S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_l (\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l})\delta q_l dt + \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l|_{t_0}^{t_1}. \tag{4}$$

Ostatni wyraz odpada, bo wariacje δq_l zerują się w chwili początkowej i końcowej.

Jeśli spełnione są równania Lagrange'a, to znika funkcja podcałkowa i $\delta S = 0$.

Jeśli $\delta S = 0$, to ze znikania całki w ogólności nie wynika znikanie funkcji podcałkowej. Jednak należy skorzystać z dowolności wariacji δq_l. Niech zerują się wszyskie δq_l w wyjątkiem $l = s$. Wtedy

$$\int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s dt = 0. \tag{5}$$

Niech nawias po całką (lewa strona równania Lagrange'a) jest w pewnym punkcie różny od zera, np. dodatni. Z ciągłości występujących tam funkcji musi być różny od zera w pewnym otoczeniu tego punktu. Gdyby wziąć wariację δq_s dodatnią w tym otoczeniu i równą zero poza tym, to całka byłaby dodatnia i mamy sprzeczność.

Prawdziwa jest więc zasada Hamiltona, która mówi, że jeśli dana jest funkcja Lagrange'a to dla ruchu rzeczywistego i tylko dla niego w każdym przedziale czasu (t_0, t_1) zachodzi $\delta S = 0$, przy $\delta q_l(t_0) = \delta q_l(t_1) = 0$.

Gdy dla pewnej trajektorii $\delta S = 0$, mówi się, że działanie ma wartość stacjonarną. Na ogół jest to minimum; dlatego zasadę tę nazywa się także zasadą najmniejszego działania. Istnienie takiego minimum wymaga jednak dodatkowych założeń.

Można pytać, skąd układ "wie", jaką trajektorię ma wybrać. W opisie kwantowym nie można układowi przypisać jednej trajektorii; należy raczej powiedzieć, że w ruchu uczestniczą wszystkie trajektorie, a wkłady od nich interferują. Dla ciał z makroświata interferencja wygasza wkłady od wszystkich trajektorii, z wyjątkiem tej ekstremalnej.

Jest to tylko jeden przykład sformułowania prawa fizyki w kategoriach wartości stacjonarnej pewnego funkcjonału. W ramach podobnej filozofii daje się sformułować prawa innych działów fizyki, np. elektrodynamiki, czy ogónej teorii względności.

Jako prosty przykład weźmy punkt materialny poruszający się w jednym wymiarze bez więzów i bez sił. Punkt materialny ma przemieścić się od $x = 0$ w chwili $t_0 = 0$ do x_1 w chwili t_1. Dopuśćmy zawężoną klasę możliwych trajektorii w postaci funkcji potęgowej $x(t) = Ct^\alpha$. Wynika stąd, że $x_1 = Ct_1^\alpha$, czyli stała $C = \frac{x_1}{t_1^\alpha}$. A więc $x(t) = \frac{x_1}{t_1^\alpha} t^\alpha$, a $\dot{x} = \frac{x_1}{t_1^\alpha} \alpha t^{\alpha-1}$.

Lagranżjan ma postać $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$. Stąd działanie wynosi

$$S = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} m \frac{x_1^2}{t_1^{2\alpha}} \alpha^2 t^{2\alpha-2} dt = \frac{1}{2t_1} m x_1^2 \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} \tag{6}$$

Działanie jest funkcją parametru α. Wartość stacjonarną przyjmuje, gdy $\frac{dS}{d\alpha} = 0$. Obliczenie pochodnej prowadzi do równania $2\alpha(\alpha - 1) = 0$. Fizyczne rozwiązanie daje więc ruch jednostajny $x(t) = \frac{x_1}{t_1} t$, jak należało oczekiwać. Można też sprawdzić, że druga pochodna dla $\alpha = 1$ jest dodatnia, a więc działanie ma minimum.

1.3 Uwagi o warunkach dostatecznych na minimum działania

Wyraz drugiego stopnia różnicy między $S[q^*]$ a $S[q]$ bierze się z wyrazów drugiego rzędu w rozwinięciu Taylora i ma postać

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{ls}(\frac{\partial^2 L}{\partial q_l \partial q_s}\delta q_l \delta q_s + 2\frac{\partial^2 L}{\partial q_l \partial \dot{q}_s}\delta q_l \delta \dot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_l \delta \dot{q}_s)dt \tag{7}$$

Zbadanie, czy powyższe wyrażenie jest dodatnio określone jest skomplikowane i nie będzie tu prowadzone szczegółowo. Można spodziewać się, że dla "małych" wariacji współrzędnych wariacje prędkości nie muszą być małe. W ten sposób o znaku przyrostu wartości działania w drugim rzędzie decyduje

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{ls}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_l \delta \dot{q}_s dt. \tag{8}$$

Jeśli współrzędne kartezjańskie wyrażono przez uogólnione w sposób niezależny od czasu, energia kinetyczna jest formą kwadratową prędkości uogólnionych $\frac{1}{2}\sum_{ls} A_{ls}(q)\dot{q}_l\dot{q}_s$, jak pokazano wcześniej. Zachodzi $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_s} = A_{ls}$. Macierz A jest dodatnio określona. Wynika stąd, że wyrażenie pod całką w ostatnim wzorze jest dodatnie. Oznacza to, że jeśli działanie osiąga ekstremum, to jest to minimum.

Aby to rzeczywiście było minimum, trzeba dodatkowo zażądać, aby na trajektorii, na której spełnione są równania Lagrange'a, nie było punktów sprzężonych z jej początkiem ani końcem. Punkt sprzężony z danym punktem P_0 jest to taki punkt, w którym trajektoria spełniają równania Lagrange'a i przechodząca przez P_0 jest przecinana przez inną taką trajektorię i nieskończenie jej bliską. Jako poglądowy przykład można podać trajektorie na powierzcbni kuli. Droga od bieguna północnego do jakiegoś punktu jest najkrótsza, jeśli biegnie po południku. Jeśli ten punkt odsuwamy i przejdziemy przez biegun południowy, droga przestaje być najkrótsza. Bieguny północny i południowy są przykładami punktów sprzężonych.

1.4 Krzywa najszybszego spadku (K)

Zasada wariacyjna i równoważne jej równania Lagrange'a (zwane też równaniami Eulera-Lagrange'a) mogą być używane do obliczania ekstremum innych funkcjonałów.

Podobnie jak dla równań ruchu Lagrange'a można dowieść, że jeśli dany jest funkcjonał postaci

$$S[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x) dx, \tag{9}$$

to warunkiem koniecznym na ekstremum funkcjonału, przy wariacjach $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$, jest zerowanie się wariacji δS funkcjonału, co jest równoważne spełnieniu równania

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{10}$$

Rozpatrzmy problem, po jakiej krzywej powinien spadać punkt materialny w polu grawitacyjnym z punktu $(0, 0)$ do punktu (x_1, y_1), aby przebyć drogę w najkrótszym czasie (to nie musi być droga geometrycznie najkrótsza, czyli odcinek prostej). Niech oś x jest pozioma, a oś y - pionowa. W punkcie początkowym ciało spoczywa, a jego energię można przyjąć równą zero. Odcinek drogi odpowiadający przedziałowi dx jest równy $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$, a prędkość $v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - (-mgy))} = \sqrt{2gy}$.

Interesujący nas funkcjonał ma postać

$$t[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \tag{11}$$

Badamy więc funkcję $F(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$, bo czynnik przed całką nie wpływa na kształt krzywej.

Jeśli funkcja $F = F(y, y')$, tzn. nie zależy od x, to pierwsze całkowanie daje

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C = const, \tag{12}$$

Można to sprawdzić, porównując

$$\begin{aligned} &1.\ \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ &2.\ \frac{d}{dx}(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'') = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

Po uporządkowania drugiego równania i podzieleniu przez y' otrzymuje się pierwsze.

W badanym przypadku otrzymuje się

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C, \tag{14}$$

lub po uporządkowaniu

$$y(1+y'^2) = 2a, \tag{15}$$

gdzie a jest inną stałą.

Zamieńmy zmienną

$$x = a(t - \sin t), \quad dx = a(1-\cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2}, \tag{16}$$

gdzie t jest nową zmienną (nie czasem). Dla $t = 0$ $x = 0$.

Wtedy

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{2a\sin^2 \frac{t}{2}}. \tag{17}$$

Równanie na funkcję $y(x(t))$ przybiera postać

$$y[1 + (\frac{dy}{dt})^2 \frac{1}{4a^2 \sin^4 \frac{t}{2}}] = 2a. \tag{18}$$

Można sprawdzić, że rozwiązaniem tego równania, spełniającym warunek $y = 0$ dla $t = 0$ jest

$$y = a(1 - \cos t). \tag{19}$$

Poszukiwaną krzywą jest więc łuk cykloidy, w tym kontekście nazywa się ją brachistochroną. Krzywa musi przechodzić przez punkt (x_1, y_1). Parametr a i wartość t_1 wyznacza się z równań

$$\begin{aligned} x_1 &= a(t_1 - \sin t_1), \\ y_1 &= a(1 - \cos t_1). \end{aligned} \tag{20}$$

2 Wariacja z wariacją czasu

Inny rodzaj wariacji otrzymamy, jeśli dodatkowo zmodyfikujemy czas, tzn. przejdziemy od czasu t do czasu $t^* = t + \Delta t$. zamiast trajektorii $q(t)$ rozpatrujemy trajektorię zmodyfikowanaą $q^*(t^*)$. Wariacja (z wariacją czasu) współrzędnej q_l wynosi z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu

$$\Delta q_l = q_l^*(t^*) - q_l(t) \approx q_l^*(t) + \frac{dq_l^*}{dt}\Delta t - q_l(t) \approx \delta q_l + \dot{q}_l \Delta t, \tag{21}$$

gdzie pod znakiem pochodnej zastąpiono q_l^* przez q_l, bo na skutek mnożenia przez Δt różnica jest już rzędu drugiego. Symbol δq_l jest jak poprzednio wariacją bez wariacji czasu.

Podobnie dla prędkości uogólnionych

$$\begin{aligned}
&\Delta \dot{q}_l = \frac{dq_l^*}{dt^*} - \frac{dq_l}{dt} \approx \frac{d}{dt}[q_l(t+\Delta t) + \delta q_l(t+\Delta t)]\frac{dt}{dt^*} - \frac{dq_l}{dt} \approx \\
&\frac{d}{dt}[q_l(t) + \dot{q}_l(t)\Delta t + \delta q_l(t)](1 - \frac{d\Delta t}{dt}) - \frac{dq_l}{dt} \approx \\
&\dot{q}_l + \ddot{q}_l \Delta t + \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} + \delta \dot{q}_l - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} - \dot{q}_l \approx \delta \dot{q}_l + \ddot{q}_l \Delta t,
\end{aligned} \tag{22}$$

gdzie pozostawiono tylko wyrazy pierwszego rzędu oraz skorzystano z relacji $\frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{1+\frac{d\Delta t}{dt}} \approx 1 - \frac{d\Delta t}{dt}$. Uwaga:

$$\frac{d}{dt}\Delta q_l = \delta \dot{q}_l + \ddot{q}_l \Delta t + \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} \neq \Delta \dot{q}_l. \tag{23}$$

Obliczmy teraz przyrost funkcjonału działania

$$\Delta S = \int_{t_0^*}^{t_1^*} L(q^*(t^*), \frac{dq^*(t^*)}{dt^*}, t^*)dt^* - \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t)dt. \tag{24}$$

Potraktujmy t^* jako funkcję czasu t, taką że $t^*(t_0) = t_0^*$ i $t^*(t_1) = t_1^*$. Wtedy przyrost funkcjonału wynosi

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} [L(q^*(t^*), \frac{dq^*(t^*)}{dt^*}, t^*)\frac{dt^*}{dt} - L(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t)]dt \approx \\
&\int_{t_0}^{t_1} [L(q^*(t^*), \frac{dq^*(t^*)}{dt^*}, t^*)(1 + \frac{d\Delta t}{dt}) - L(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t)]dt \approx \\
&\int_{t_0}^{t_1} \{\sum_l [\frac{\partial L}{\partial q_l}(q_l^*(t+\Delta t) - q_l(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(\dot{q}_l^*(t+\Delta t) - \dot{q}_l(t)] + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + L(q, \dot{q}, t)\frac{d\Delta t}{dt}\}dt \approx \\
&\int_{t_0}^{t_1} \{\sum_l [\frac{\partial L}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\Delta \dot{q}_l] + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + L(q, \dot{q}, t)\frac{d\Delta t}{dt}\}dt = \\
&\int_{t_0}^{t_1} \{\Delta L + L(q, \dot{q}, t)\frac{d\Delta t}{dt}\}dt = \Delta S,
\end{aligned} \tag{25}$$

gdzie wariacja lagranżjanu wynosi

$$\Delta L = \sum_l [\frac{\partial L}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\Delta \dot{q}_l] + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t. \tag{26}$$

3 Twierdzenie Noether

Twierdzenie Noether w tym rozdziale jest przykładem jednego z najogólnieszych twierdzeń fizyki. Wiąże ono dwie bardzo ogólne własności układów fizycznych: symetrie i prawa zachowania. Symetria oznacza najogólniej, że poddajemy układ transformacji, a on się przy tym nie zmienia. Wyznacznikiem symetrii w naszym przypadku jest niezmienniczość działania $\Delta S = 0$.

Twierdzenie Noether mówi, że przy obowiązujących równanich Lagrange'a każdej ciągłej transformacji współrzędnych zachowującej działanie odpowiada stała ruchu.

Jeśli transformacja jest wieloparametrowa, z każdym parametrem wiąże się jedna stała ruchu.

Dla dowodu napiszmy wariację funkcjonału

$$\Delta S = \int_{t_0}^{t_1}\{\sum_l [\frac{\partial L}{\partial q_l}(\delta q_l + \dot{q}_l \Delta t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(\delta \dot{q}_l + \ddot{q}_l \Delta t)] + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t\} + L(q,\dot{q},t)\frac{d\Delta t}{dt}\}dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\{\sum_l [\frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta \dot{q}_l] + \frac{dL}{dt}\Delta t + L\frac{d\Delta t}{dt}\}dt = \tag{27}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\{\sum_l [\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}]\delta q_l + \sum_l \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l)] + \frac{d}{dt}(L\Delta t)\}dt =$$

$$\{\sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l + L\Delta t\}|_{t_0}^{t_1}. \tag{28}$$

W powyższym obliczeniu wykonano całkowanie przez części oraz skorzystano z tego, że spełnione są równania Lagrange'a. Jeśli $\Delta S = 0$, to wyraz w ostatniej linii jest stały w czasie.

Najprostsze przykłady dla jednego punktu materialnego są następujące: $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V$.

1.Transformacja przesunięcia $x^* = x + a$, $\delta x = a$, $\Delta t = 0$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}a = m\dot{x}a = const. \tag{29}$$

Niezmienniczość względem przesunięć implikuje zachowanie pędu. To zachodzi dla cząstki bez potencjału.

2. Transformacja obrotu, np. wokół osi z: $x* = x\cos\phi + y\sin\phi$, $y^* = -x\sin\phi + x\cos\phi$. Dla infinitezymalnych obrotów $x^* = x + y\phi$, $y^* = -x\phi + y$, dką wynika, że $\delta x = y\phi$, $\delta y = -x\phi$. Stała ruchu ma postać

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-a\phi) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}})x\phi = [m\dot{x}y - m\dot{y}x](-\phi) = -J_z\phi. \tag{30}$$

Niezmienniczość względem obrotu implikuje zachowanie mementu pędu. To zachodzi na przykład dla cząstki w potencjale sferycznym.

3. Transformacja przesunięcia w czasie. $t^* = t + \tau$, $\Delta t = \tau$, $\Delta x = \delta x + \dot{x}\Delta t = 0$, $\Delta y = \delta y + \dot{y}\Delta t = 0$, $\Delta z = \delta z + \dot{z}\Delta t = 0$. Stała ruchu ma postać

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\delta z + L\Delta t = m\dot{x}(-\dot{x}\tau) + m\dot{y}(-\dot{y}\tau) + m\dot{z}(-\dot{z}\tau) + (T - V)\tau = -(T + V). \tag{31}$$

Niezmienniczość względem przesunięcia w czasie implikuje zachowanie energii.

Dla wielu ciał możemy mieć bardziej skomplikowane sytuacje. Na przykład, gdy energia potencjalna V oddziaływania 2 ciał zależy od różnicy położeń, tzn. $V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, mamy niezmienniczość względem jednoczesnego przesunięcia obu ciał. Lagranżjan $L = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^2 + V$.

Zachowana wielkość to $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}a + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}a = (m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)a$, czyli zachowany jest wypadkowy pęd obu ciał.

4 Zasada Maupertuis

Zasada ta jest zasadą wariacyjną, którą można zastosować, gdy siły nie mają potencjału ani potencjału uogólnionego.

Mówi ona, że dla układu punktów materialnych o więzach holomomicznych, dwustronnych, niezależnych od czasu, gdy energia kinetyczna jest różna od zera, równania Lagrange'a są równoważne żądaniu, by

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0, \tag{32}$$

gdy $\Delta q_l(t_0) = \Delta q_l(t_1) = 0$, $\Delta T = \Delta A \equiv \sum_l Q_l \Delta q_l = 0$. Tu T jest energią kinetyczną, a Q_l są siłami uogólnionymi.

Dla dowodu rozpatrzmy

$$2\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 2\int_{t_0}^{t_1} [\Delta T + T\frac{d\Delta t}{dt} - \frac{1}{2}(\Delta T - \Delta A)]dt = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt} + \Delta A]dt, \tag{33}$$

gdzie skorzystano z wprowadzonego wyżej związku wariacji funkcjonału będącego całką z wariacją funkcji podcałkowej, a także odjęto sztucznie $\frac{1}{2}(\Delta T - \Delta A) = 0$.

Kontynuując obliczenia, otrzymujemy

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\Delta \dot{q}_l) + 2T\frac{d\Delta t}{dt}dt + \Delta A]dt = \\ \int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\Delta \dot{q}_l) + \sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta t}{dt} + \sum_l Q_l \Delta q_l]dt = \\ \int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l} + Q_l)\Delta q_l + \sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}(\Delta \dot{q}_l + \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt})]dt, \end{gathered} \tag{34}$$

gdzie skorzystano z faktu, że jeśli współrzędne uogólnione wprowadzono w sposób niezależny explicite od czasu, energia kinetyczna jest formą kwadratową prędkości uogólnionych $T = \frac{1}{2}\sum_{ls} A_{ls}(q)\dot{q}_l \dot{q}_s$, skąd $2T = \sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l$.

Dalej skorzystamy z relacji $\Delta \dot{q}_l + \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{d}{dt}\Delta q_l$, otrzymując

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l} + Q_l)\Delta q_l + \sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d}{dt}\Delta q_l]dt = \\ \int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l} + Q_l - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l})\Delta q_l]dt + \sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\Delta q_l|_{t_0}^{t_1}. \end{gathered} \tag{35}$$

gdzie wykonano całkowanie przez części.

W chwilach t_0 i t_1 $\Delta q_l = 0$ na mocy założenia. Jeśli spełnione są równania Lagrange'a, to znika funkcja podcałkowa i w konsekwencji wariacja badanego funkcjonału $\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0$.

Jeśli znika wariacja funkcjonału, nie można automatycznie twierdzić, że spełnione są równania Lagrange'a, bo wariacje Δq_l nie są w ogólności niezależne; są związane z wariacją Δt.

Z warunku $\Delta T = \Delta A$ wynika dalej

$$\Delta T = \sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\Delta \dot{q}_l) = \sum_l Q_l \Delta q_l = \Delta A. \tag{36}$$

Ponieważ $\Delta\dot{q}_l = \frac{d}{dt}\Delta q_l - \dot{q}_l\frac{d}{dt}\Delta t$, zachodzi

$$\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}(\frac{d}{dt}\Delta q_l - \dot{q}_l\frac{d}{dt}\Delta t)) = \sum_l Q_l \Delta q_l. \tag{37}$$

Ponieważ $2T = \sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l$, można napisać

$$\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d}{dt}\Delta q_l) - 2T\frac{d}{dt}\Delta t = \sum_l Q_l \Delta q_l. \tag{38}$$

Jeśli $T \neq 0$ w interesującym nas przedziale czasu, można wyliczyć wariację czasu

$$\Delta t(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2T}[\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l)\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d}{dt}\Delta q_l)]dt + \Delta t(t_0). \tag{39}$$

W ten sposób wariacje Δt można wyrazić przez wariacje Δq_l, a te ostatnie już są niezależne. Oznacza to, że z otrzymanej wcześniej relacji

$$\int_{t_0}^{t_1} [\sum_l (\frac{\partial T}{\partial q_l} + Q_l - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l})\Delta q_l]dt = 0 \tag{40}$$

wobec niezależności Δq_l spełnione są równania Lagrange'a.

Jeśli istnieje energia potencjalna niezależna od czasu, tzn $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}$, to warunek $\Delta T = \Delta A = -\sum_l \frac{\partial V}{\partial q_l}\Delta q_l = -\Delta V$, a więc $\Delta(T+V) = 0$, czyli rozważamy ruchy porównawcze na hiperpowierzchni stałej energii.