Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.5

1 Mechanika Lagrange'a 2

1.1 Współrzędne uogónione

Współrzędne kartezjańskie nie są optymalne do opisu układów punktów materialnych z więzami: jest ich za dużo ($3N$), (a wystarczyłoby f, bo ruch zachodzi na f-wymiarowej hiperpowierzchni) i nie są niezależne. Dlatego opłaca się przejść do nowych współrzędnych, niezależnych, w liczbie f, takich,żeby równania więzów były automatycznie spełnione.

Weźmy układ N punktów materialnych z więzami holonomicznymi dwustronnymi $f_k(x,t) = 0$, $k = 1, 2, ..., p$, $x = (x_1, x_2, ..., x_{3N})$. Wprowadźmy nowe współrzędne - uogólnione - $q = (q_1, q_2, ..., q_f)$

$$x = x(q,t), \quad f_k(x(q,t),t) \equiv 0. \tag{1}$$

Ważne jest że ostatnia równość jest tożsamościowa, tzn. jest spełniona dla wszystkich q. Z tego wynika natychmiast, że $\frac{\partial f_k}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \equiv 0$.

Przykładem współrzędnej uogólnionej dla ruchu po okręgu o promieniu R w płaszczyźnie (xy), tzn. przy więzach $f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ $f_2(x,y,z) = z = 0$, tzn. $f = 1$, jest kąt obrotu ϕ, taki że $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$; wtedy $x^2 + y^2 - R^2 = R^2\cos^2\phi + R^2\sin^2\phi - R^2 \equiv 0$.

Podobnie dla ruchu po powierzchni kuli o promieniu R, tzn. z więzami $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$, wygodnymi współrzędnymi uogólnionymi są kąty θ i ϕ, takie że $x = R\sin\theta\cos\phi$, $y = R\sin\theta\sin\phi$, $z = R\cos\theta$ (szerokość geograficzna liczona od bieguna i długość geograficzna).

Jeśli nie ma więzów, współrzędnymi uogólnionymi mogą być po prostu współrzędne kartezjańskie lub jakieś współrzędne krzywoliniowe w liczbie $3N$.

Ważne są dwie tożsamości.

1. Z relacji $\dot{x}_j = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial x_j}{\partial t}$ wynika, że $\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$.
2. $\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l}$.

Tożsamość 2 można wykazać, badając obie jej strony:
$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \sum_{s=1}^{f} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_s \partial q_l}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_l}$,
$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l}(\sum_{s=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x_j}{\partial t}) = \sum_{s=1}^{f} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial t}$.
Przy założeniu, że drugie pochodne cząstkowe istnieją i są ciągłe, kolejność różniczkowania cząstkowego nie jest istotna i prawe strony dwóch ostatnich wzorów są identyczne.

1.2 Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania ruchu we współrzędnych uogólnionych q_l można otrzymać z równań Lagrange'a I rodzaju

$$m_j \ddot{x}_j = X_j + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Pomnóżmy obie strony przez $\frac{\partial x_j}{\partial q_l}$ i wysumujmy po j

$$\sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3N} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} + \sum_{j=1}^{3N}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \tag{3}$$

Ostatni wyraz po prawej stronie jest równy $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_l} = 0$. Pierwszy wyraz po prawej stronie nazywamy siła uogólnioną i oznaczamy przez $Q_l = \sum_{j=1}^{3N} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$. Lewą stronę przekształcimy, korzystając z dwóch udowodnionych tożsamości

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{d}{dt}(m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l}) - \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \\
&\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} - \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\sum_{j=1}^{3N}\frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 - \frac{\partial}{\partial q_l}\sum_{j=1}^{3N}\frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l},
\end{aligned} \tag{4}$$

gdzie T jest energią kinetyczną układu.

Równania ruchu, nazywane równaniami Lagrange'a II rodzaju, mają więc postać

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l, \quad l = 1, 2, ..., f. \tag{5}$$

Jeśli istnieje energia potencjalna $V(x,t)$, czyli $X_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$, to siła uogólniona $Q_l = -\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} = -\frac{\partial V(x(q,t),t)}{\partial q_l}$. Równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują wtedy postać

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l}. \tag{6}$$

Ponieważ V nie zależy od prędkości uogólnionych $\dot{q}_l$, można wprowadzić funkcję Lagrange'a (lagranżjan) $L(q,\dot{q},t) = T - V$ i napisać równania Lagrange'a jako

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0. \tag{7}$$

Są sytuacje, gdy nie istnieje energia potencjalna, ale istnieje funkcja $U(q,\dot{q},t)$, taka że $Q_l = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial U}{\partial q_l}$. Wtedy lagranżjan $L = T - U$ i też obowiązują równania Lagrange'a w ostatniej postaci.

Pędem uogólnionym nazywamy wielkość $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$. Równania Lagrange'a można więc napisać w postaci

$$\dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l}. \tag{8}$$

Może się zdarzyć, że lagranżjan nie zależy od pewnej współrzędnej, zwanej wtedy cykliczną. W takim przypadku $\frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$ i pęd uogólniony związany z tą współrzędną jest zachowany; mówi się też, że jest stałą lub całką ruchu.

Inną ważną wielkością jest funkcja

$$G(q,\dot{q},t) = \sum_{l=1}^{f} p_l(q,\dot{q},t)\dot{q}_l - L(q,\dot{q},t). \tag{9}$$

Pochodna tej funkcji wynosi

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\sum_l p_l\dot{q}_l - L) = \sum_l(\dot{p}_l\dot{q}_l + p_l\ddot{q}_l) - [\sum_l(\frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l) + \frac{\partial L}{\partial t}] = \\ &\sum_l(\frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l) - \sum_l(\frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie wykorzystano równanie Lagrange'a $\dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l}$ oraz definicję $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$. Zatem, jeśli lagranżjan nie zależy explicite od czasu, funkcja G jest stałą ruchu.

Przy dodatkowych założeniach funkcja G ma prostą interpretację: jeśli transformacja od zmiennych kartezjańskich do uogólnionych nie zależy explicite od czasu, tzn. $x_j = x_j(q)$, czyli $\frac{\partial x_j}{\partial t} = 0$ dla wszystkisch j, oraz istnieje energia potencjalna V, to funkcja G jest energią całkowitą układu. Aby to pokazać zauważmy, że wtedy

$$\dot{x}_j = \sum_l \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l, \tag{11}$$

a energia kinetyczna wynosi

$$T = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j \sum_l \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l \sum_s \frac{\partial x_j}{\partial q_s} \dot{q}_s \equiv \frac{1}{2} \sum_{l,s=1}^{f} A_{ls}(q) \dot{q}_l \dot{q}_s, \tag{12}$$

gdzie definicja macierzy symtrycznej A wynika z powyższego zapisu. Lagranżjan $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - V(q, t)$. Wobec tego pęd uogólniony

$$p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \frac{1}{2} \sum_{l,s=1}^{f} A_{ls}(q) \dot{q}_l \dot{q}_s = \frac{1}{2} \sum_s A_{ms}(q) \dot{q}_s + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{f} A_{lm}(q) \dot{q}_l = \sum_{s=1}^{f} A_{ms}(q) \dot{q}_s,$$

a funkcja G

$$G = \sum_m p_m \dot{q}_m - L = \sum_{l,m} A_{lm} \dot{q}_m \dot{q}_l - (T - V) = 2T - T + V = T + V. \tag{14}$$

1.3 Punkt materialny bez więzów z energią potencjalną, współrzędne kartezjańskie

Gdy nie ma więzów, rolę współrzędnych uogólnionych mogą grać współrzędne kartezjańskie. Lagranżjan ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z, t). \tag{15}$$

Równanie Lagrange'a , np. dla zmiennej x, ma postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} m\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = m\ddot{x} - F_x = 0. \tag{16}$$

Otrzymuje się więc równanie Newtona. Pęd uogólniony związany ze współrzędną x ma postać $p_x = m\dot{x}$; jest więc znaną składową x pędu $m\dot{\mathbf{r}}$.

1.4 Naładowany punkt materialny bez więzów w polu elektromagnetycznym

Na punkt materialny o ładunku Q działa siła Lorentza

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \tag{17}$$

Z równań Maxwella wynika, że można zdefiniować (niejednoznacznie) potencjał skalarny $\phi(\mathbf{r}, t)$ i wektorowy $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, takie że

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{18}$$

Okazuje się, że dla siły Lorentza istnieje potencjał uogólniony

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = Q\phi(\mathbf{r}, t) - Q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\dot{\mathbf{r}}. \tag{19}$$

Aby to sprawdzić, obliczmy składową siły, np. w kierunku x

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = -Q\frac{d}{dt}A_x - Q\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial x}(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) = \\ &-Q(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}) + Q(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}) - Q\frac{\partial \phi}{\partial x} = \\ &Q(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}) + Q\dot{y}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) - Q\dot{z}(-\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z}) = \\ &QE_x + Q(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) = QE_x + Q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_x. \end{aligned} \tag{20}$$

Istotnie, zapostulowany potencjał uogólniony odtwarza siłę Lorentza, a więc równania Lagrange'a stają się równaniami Newtona z tą siłą. Lagranżjan ma postać

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - Q\phi + Q(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}). \tag{21}$$

Pęd uogólniony w kierunku x wynosi

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + QA_x. \tag{22}$$

Można napisać $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + Q\mathbf{A}$. Pęd uogólniony nie jest więc tożsamy z pędem kinetycznym $m\dot{\mathbf{r}}$.

1.5 Wahadło matematyczne

Rozpatrzmy punkt materialny poruszający się po pionowo ustawionym okręgu o promieniu l w polu grawitacyjnym Niech oś x będzie pozioma, a oś y skierowana pionowo w dół. Równania więzów są $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, $z = 0$. Wygodną współrzędną uogólnioną jest kąt ϕ odchylenia wahadła od pionu, tzn.

$$\begin{aligned} x &= l \sin\phi, \\ y &= l \cos\phi. \end{aligned} \tag{23}$$

Pochodne współrzędnych są

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l \cos\phi\dot{\phi}, \\ \dot{y} &= -l \sin\phi\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{24}$$

Energia kinetyczna wynosi $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$. Energia potencjalna jest $V = -mgy = -mgl\cos\phi$. Lagranżjan ma postać

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi. \tag{25}$$

Pochodne występujące w równaniach Lagrange'a wynoszą

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= ml^2\dot{\phi}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= ml^2\ddot{\phi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -mgl\sin\phi. \end{aligned} \tag{26}$$

Równanie Lagrange'a ma postać

$$ml^2\ddot{\phi} + mgl\sin\phi = 0, \tag{27}$$

lub

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin\phi = 0, \tag{28}$$

gdzie $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

W przybliżeniu małych drgań, polegającym na pozostawieniu w równaniach ruchu wyrazów, w których współrzędne i prędkości występują w pierwszej potędze (lub w lagranżjanie - w drugiej potędze), otrzymujemy ze względu na to, że $\sin\phi = \phi - \frac{1}{6}\phi^3 + ... \approx \phi$

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0. \tag{29}$$

mamy więc oscylator harmoniczny, a rozwiązaniem równania jest $\phi(t) = A\sin(\omega t + \phi_0)$, gdzie stałe A i ϕ_0, mające sens odpowiednio amplitudy i fazy początkowej, wyznacza się z warunków początkowych.

Rozwiązanie w ogólnym przypadku daje się rozwiązać. Pomnóżmy obie strony równani przez $\dot{\phi}$

$$\ddot{\phi}\dot{\phi} + \omega^2 \sin\phi\dot{\phi} = 0. \tag{30}$$

W obu wyrazach rozpoznajemy pochodne względem czasu

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \omega^2 \frac{d}{dt}\cos\phi = 0, \tag{31}$$

Całkowanie równania daje

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \omega^2\cos\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi_0}^2 - \omega^2\cos\phi_0, \tag{32}$$

gdzie stałą po prawej stronie wyrażono przez położenie ϕ_0 w chwili początkowej i prędkość kątową w chwili początkowej; stała ta jest całkowitą energią podzieloną przez ml^2. Otrzymuje się stąd prędkość uogólnioną

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \pm\sqrt{2[\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 - \omega^2(\cos\phi_0 - \cos\phi)]}). \tag{33}$$

Rozwiązanie można napisać w postaci całki

$$t = \int dt = \pm\int \frac{d\phi}{\sqrt{2[\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 - \omega^2(\cos\phi_0 - \cos\phi)]})}. \tag{34}$$

Wyraża ono funkcję $t = t(\phi)$, odwrotną do poszukiwanej $\phi(t)$. Jeśli wyrażenie pod pierwiastkiem jest zawsze dodatnie, znak jest stały i występuje ruch obrotowy wahadła. Jeśli natomiast wyrażenie pod pierwiastkiem zmienia znak, dostępne są tyko takie kąty, dla których jest ono dodatnie; ruch jest wtedy okresowy i w punktach zwrotu należy zmienić znak. Niech w szczególności $\phi_0 = 0$. Okres wahadła wynosi

$$T = 4\int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{2[\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 - \omega^2(1-\cos\phi)]}} = 4\int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\dot{\phi}_0^2 - 4\omega^2 \sin^2\frac{\phi}{2}}}, \tag{35}$$

gdzie ϕ_1 odpowiada punktowi zwrotu, tzn. $\sin\frac{\phi_1}{2} = \frac{\phi_0}{2\omega}$. Gdy $\phi_0 = 2\omega$, $\phi_1 = \pi$, całka jest rozbieżna, czas potrzebny do osiągnięcia przez wahadło górnego położenia równowagi staje się nieskończony.

W przybliżeniu małych drgań okres nie zależy od amplitudy; w ogólności od niej zależy.

1.6 Dwa wahadła pozornie podobne

Rozważmy najpierw wahadło matematyczne z poprzedniego problemu, które jest zawieszone na ciężarku o masie M zaczepionym na sprężynie i mogącym się poruszać wzdłuż osi x. Są 2 stopnie swobody. Wygodne współrzędne uogólnione to kątϕ nachylenia wahadła do pionu i X- położenie ciężarka M względem położenia równowagi.

Współrzędne wahadła są

$$\begin{aligned} x &= X + l\sin\phi, \\ y &= l\cos\phi. \end{aligned} \tag{36}$$

Energia kinetyczna wahadła wynosi

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{X}l\dot{\phi}\cos\phi + \frac{1}{2}\dot{X}^2). \tag{37}$$

Energia kinetyczna ciężarka M to $\frac{1}{2}M\dot{X}^2$. Energia potencjalna wahadła to $-mgy = -mgl\cos\phi$. Energia potencjalna ciężarka to $\frac{1}{2}kX^2$, gdzie k jest stałca sprężystości sprężyny.

Lagranżjan ma więc postać

$$L = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{X}l\dot{\phi}\cos\phi) + \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + mgl\cos\phi - \frac{1}{2}kX^2. \tag{38}$$

Potrzebne pochodne wynoszą

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi} + ml\cos\phi\dot{X},$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = ml^2\ddot\phi + ml\cos\phi\ddot X - ml\sin\phi\dot\phi\dot X, \\
&\frac{\partial L}{\partial \phi} = -ml\dot\phi\dot X\sin\phi - mgl\sin\phi && (39)\\
&\frac{\partial L}{\partial \dot X} = (m+M)\dot X + ml\dot\phi\cos\phi, \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot X} = (m+M)\ddot X + ml\ddot\phi\cos\phi - ml\dot\phi^2\sin\phi, \\
&\frac{\partial L}{\partial X} = -kX. && (40)
\end{aligned}
$$

Równania Lagrange'a mają więc postać

$$
\begin{aligned}
&ml^2\ddot\phi + ml\cos\phi\ddot X - ml\sin\phi\dot\phi\dot X + ml\dot\phi\dot X\sin\phi + mgl\sin\phi = 0, && (41)\\
&(m+M)\ddot X + ml\ddot\phi\cos\phi - ml\dot\phi^2\sin\phi + kX = 0.
\end{aligned}
$$

(dwa wyrazy w pierwszym równaniu się redukują). Równania opisują sprzężone drgania we współrzędnych ϕ i X.

Jako drugi przykład weźmy sytuację, gdy ciężarek M porusza się ruchem harmonicznym z częstością Ω. Współrzędna X przestaje być zmienną - jej ruch jest zadany $X = X_0\cos(\Omega t + \alpha)$. Układ ma tylko jeden stopień swobody, więzy zależą od czasu, a kąt ϕ jest jedyną współrzędną uogólnioną. Współrzędne kartezjańskie wahadła dają się wyrazić jako

$$
\begin{aligned}
x &= X_0\cos(\Omega t + \alpha) + l\sin\phi, \\
y &= l\cos\phi. && (42)
\end{aligned}
$$

Mamy

$$
\begin{aligned}
\dot x &= -X_0\Omega\sin(\Omega t + \alpha) + l\cos\phi\dot\phi, \\
\dot y &= -l\sin\phi\dot\phi && (43)
\end{aligned}
$$

Lagranżjan ma postać

$$
\begin{aligned}
&L = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + mgy = && (44)\\
&\frac{1}{2}m(l^2\dot\phi^2 - 2X_0\Omega\sin(\Omega t + \alpha)\cos\phi\dot\phi + X_0^2\Omega^2\sin^2(\omega t + \alpha)) + mgl\cos\phi
\end{aligned}
$$

Potrzebne pochodne to

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= ml^2\dot{\phi} - mX_0\Omega \sin(\Omega t + \alpha)\cos\phi, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= ml^2\ddot{\phi} - mX_0\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha)\cos\phi + mX_0\Omega\sin(\Omega t + \alpha)\sin\phi\dot{\phi}, \\
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= mX_0\Omega\sin(\Omega t + \alpha)\sin\phi\dot{\phi} - mgl\sin\phi. \qquad (45)
\end{aligned}$$

Równanie Lagrange'a ma więc postać

$$\begin{aligned}
ml^2\ddot{\phi} - mX_0\Omega^2\cos(\Omega t + \alpha)\cos\phi + mX_0\Omega\sin(\Omega t + \alpha)\sin\phi\dot{\phi} \\
-mX_0\Omega\sin(\Omega t - \alpha)\sin\phi\dot{\phi} + mgl\sin\phi = 0. \qquad (46)
\end{aligned}$$

1.7 Współrzędne kuliste

Współrzędne kuliste (r, θ, ϕ) są związane z kartezjańskimi relacjami

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi, \\
y &= r\sin\theta\sin\phi, \qquad (47) \\
z &= r\cos\theta, \qquad (48)
\end{aligned}$$

gdzie r jest długością wektora wodzącego $\mathbf{r}$, θ - kątem jego nachylenia do osi z, a ϕ - kątem między jego rzutem na płaszczyznę (xy) a osią x. Pochodne wynoszą

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\dot{\theta}\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi\dot{\phi}, \\
\dot{y} &= \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\dot{\theta}\sin\phi + r\sin\theta\cos\phi\dot{\phi}, \\
\dot{z} &= \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}. \qquad (49)
\end{aligned}$$

Po podstawieniu energia kinetyczna punktu materialnego wyraża się jako

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2). \qquad (50)$$

Dla ciała w polu sił potencjalnych lagranżjan ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi). \qquad (51)$$

Współrzędnym kulistym odpowiadają pędy uogólnione

$$
\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \\
p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2\theta\dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{52}
$$

Pęd p_r jest składową radialną pędu kinetycznego $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Natomiast pozostałe pędy uogólnione są rzutami momentu pędu: wstawiając współrzędne i prędkości do definicji momentu pędu otrzymuje się, że $p_\phi = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = J_z$, natomiast $p_\theta = J_y \cos\phi - J_x \sin\phi$. Równania Lagrange'a mają postać

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \\
&mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \\
&2mr\dot{r}\sin^2\theta\dot{\phi} + 2mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + mr^2\sin^2\theta\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0.
\end{aligned} \tag{53}
$$