Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.4

1 Mechanika Lagrange'a 1

1.1 Więzy

Dotąd rozważano układy punktów materialnych swobodnych, tzn. takich, że nie nakładano żadnych ograniczeń na współrzędne lub prędkości. Teraz dopuścimy takie ograniczenia, zwane więzami.

Więzy zadane równaniami nazywa się dwustronnymi, w odróżnieniu od więzów jednostronnych, zadanych przez nierówności.

Więzy w postaci równania lub nierówności stanowiących ograniczenie na współrzędne $f(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t) = 0$ lub $f(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t) > 0$ nazywa się holonomicznymi. Jeśli ograniczenie zadane są w postaci różniczkowej, niesprowadzalnej do postaci $f(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t) = 0$ lub $f(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t) > 0$, więzy są nieholonomiczne.

Więzy niezależne od czasu nazywa się skleronomicznymi; więzy zależne od czasu są to więzy reonomiczne.

W niniejszym wykładzie rozważane będą układy z więzami holonomicznymi dwustronnymi.

Przykładem może być ruch cząstki po powierzchni kuli o promieniu R. Równanie więzów ma postać $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$. Ruch zachodzi po dwuwymiarowej powierzchni zanurzonej w przestrzeni trójwymiarowej.

Ruch po okręgu o promieniu R leżącym w płaszczyźnie (xy) ograniczony jest dwoma równaniami więzów: $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ i $f_2(x, y, z) = z = 0$. Ruch zachodzi po jednowymiarowej powierzchni zanurzonej w przestrzeni trójwymiarowej.

Dla dwóch punktów materialnych połączonych nieważkim prętem o długości l równanie więzów ma postać $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$. Ruch zachodzi po pięciowymiarowej hiperpowierzchni zanurzonej w przestrzeni sześciowymiarowej.

Ogólnie, jeśli mamy N ciał poddanych p więzom holonomicznym dwustronnym $f_k(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N, t) = 0$, $k = 1, 2, ...p$, ruch odbywa się po $f = 3N - p$-wymiarowej hiperpowierzchni zanurzonej w przestrzeni $3N$-wymiarowej. Liczba f jest liczbą stopni swobody, tzn. liczbą współrzędnych mogących zmieniać się niezależnie.

1.2 Równania Lagrange'a I rodzaju

U podstaw równań ruchu leży fakt doświadczalny, że więzy wywierają na punkt materialny dodatkową siłę, zwaną siłą reakcji. Tę siłę należy dodać do sił działających. Faktem doświadczalnym jest, że poza przypadkiem sił tarcia, siła reakcji jest prostopadła do powierzchni więzów. Na przykład dla wahadła mogącego poruszać się po powierzchni kuli siła reakcji działa wzdłuż promienia kuli, czyli prostopadle do jej powierzchni.

Weźmy powierzchnię daną równaniem $f(\mathbf{r}) = 0$. Niech punkty $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ leżą na tej powierzchni, tzn. $f(\mathbf{r}) = 0$ i $f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = 0$. Ponieważ $f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \nabla f d\mathbf{r}$, a wektor $d\mathbf{r}$ jest styczny do powierzchni, wynika stąd, że wektor ∇f jest prostopadły do powierzchni. Siłę reakcji można więc napisać jako $\mathbf{F}_R = \lambda \nabla f$ Równanie ruchu punktu materialnego poruszającego się po powierzchni $f(\mathbf{r}) = 0$ można napisać jako

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda \nabla f, \tag{1}$$

gdzie $\underline{F}$ jest siłą działającą, a λ - wielkością na razie nieokreśloną, zwaną czynnikiem Lagrange'a. Razem z równaniem więzów mamy 4 równania z 4 niewiadomymi (z, y, z, λ).

W przypadku ruchu po krzywej, będącej przecięciem dwóch powierzchni $f_1(\mathbf{r}) = 0$ i $f_2(\mathbf{r}) = 0$, siły reakcji pochodzące od 2 więzów dodają się i równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2, \tag{2}$$

więc razem z równaniami więzów jest 5 równań z 5 niewiadomymi.

Uogólniając te wyniki należy powiedzieć, że dla układu N punktów materialnych z p więzami holonomicznymi dwustronnymi $f_k(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t) = 0$, $k = 1, 2, ...p$, równania ruchu mają postać

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \nabla_i f_k, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{F}_i$ jest siłą działającą na $i-ty$ punkt materialny, a indeks przy nabli oznacza, względem współrzędnych której cząstki wykonuje się różniczkowanie. Razem z równaniami więzów mamy $3N + p$ równań i tyleż niewiadomych. Te równania ruchu nazywa się równaniami Lagrange'a I rodzaju.

Warto zmienić notację, oznaczając jednolicie wszystkie współrzędne wszystkich ciał. Niech

$$\begin{aligned} x_j &\to x_{3j-2}, \\ y_j &\to x_{3j-1}, \\ z_j &\to x_{3j}, \qquad j = 1, 2, ...N \end{aligned} \tag{4}$$

oraz

$$m_j \to m_{3j-2} = m_{3j-1} = m_{3j}. \quad j = 1, 2, ..., N \tag{5}$$

(jest pewnę niedogodnością wprowadzenie trzech różnych oznaczeń na masę każego ciała). Niech x bez indeksu oznacza ciąg $3N$ współrzędnych $x = (x_1, x_2, ..., x_{3N})$. Ustawmy także składowe sił działających w ciąg

$$F_{jx} \to X_{3j-2}$$

$$F_{jy} \to X_{3j-1}, \tag{6}$$

$$F_{jz} \to X_{3j}, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{7}$$

W tej notacji równania Lagrange'a I rodzaju mają postać

$$m_j \ddot{x}_j = X_j + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, ..., 3N. \tag{8}$$

$3N$-wymiarowa przestrzeń, której punktami są ciągi $x = (x_1, x_2, ..., x_{3N})$ nazywa się przestrzenią konfiguracyjną.

W przypadku jednego ciała i jednego równania więzów $f(\mathbf{r}) = 0$ współczynnik λ można wyznaczyć. Równanie ruchu

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda \nabla f \tag{9}$$

pomnóżmy skalarnie przez ∇f. Otrzymamy

$$m\ddot{\mathbf{r}} \nabla f = \mathbf{F} \nabla f + \lambda (\nabla f)^2. \tag{10}$$

Z drugiej strony dwukrotne zróżniczkowanie równania więzów niezależnych od czasu daje

$$\nabla f \dot{\mathbf{r}} = 0, \tag{11}$$
$$\ddot{\mathbf{r}} \nabla f + \dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} \nabla f = 0.$$

Wyraz z przyspieszeniem można wyliczyć z ostatniego równania i wstawić do równania ruchu otrzymując

$$-m\dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} \nabla f = \mathbf{F} \nabla f + \lambda (\nabla f^2). \tag{12}$$

Z ostaniego równania można wyliczć λ i wstawić do równania ruchu otrzymując ostatecznie

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \nabla f \frac{-m\dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} \nabla f - \mathbf{F} \nabla f}{(\nabla f)^2}. \tag{13}$$

1.3 Położenia równowagi

Załóżmy, mamy do czynienia z więzami i siłami niezależnymi od czasu. Równowaga w punkcie x_0 oznacza, że biorąc $x_j(t) = x_{j0} = const$, $\dot{x_j} = 0$, $\ddot{x_j} = 0$, dla $j = 1, 2, ..., 3N$ otrzymamy rozwiązanie równań ruchu czyli

$$0 = X_j + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad \jmath = 1, 2, ..., 3N. \tag{14}$$

Jeśli siły zależą od prędkości, należy te prędkości położyć równe zeru.

Z równań ruchu wynika, że jest to warunek konieczny na położenie równowagi, a twierdzeń o jednoznaczności rozwiązań - że jest to warunek dostateczny.

Jeśli siły są potencjalne tzn. $X_j = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, ..., 3N$, to warunek równowagi przybiera postać

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k) = 0, \quad j = 1, 2, ..., 3N. \tag{15}$$

Jest to warunek konieczny na ekstremum lub wartość siodłową funkcji V przy warunkach ubocznych $f_k(x) = 0$.

Tak więc dla więzów i sił niezależnych od czasu punkt położemia równowagi jest ekstremum lub punktem siodłowym energii potencjalnej i odwrotnie punkt będący ekstremum lub punktem siodłowym energii potencjalnej jest położeniem równowagi.

Punkt, w którym energia potencjalna przyjmuje minimum właściwe przy warunkach stwarzanych przez równania więzów jest położeniem równowagi trwałej, tzn. układ wytrącony z tego punktu przez nadanie dowolnie małej energii kinetycznej będzie pozostawał w otoczeniu tego punktu. Uzasadnienie tego twierdzenia (Dirichleta) opiera się na obserwacji, że opuszczenie otoczenia tego punktu wymagałoby pokonania bariery potencjału, a zbyt mała energia kinetyczna na to nie zezwala.

1.3.1 Uwaga o ekstremum warunkowym

Weźmy funkcję 2 zmiennych $z = F(x, y)$. Ekstremum warunkowego szukamy nie w całym obszarze określoności funkcji F, lecz tylko na krzywej $f(x, y) = 0$, $z = 0$. Należy wyznaczyć y jako funkcję x i szukać ekstremum funkcji $F(x, y(x))$ jako funkcji x. Warunkiem koniecznym (ale nie dostatecznym) na ekstremum jest

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{16}$$

Z drugiej strony zróżniczkowanie równania więzów daje

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{17}$$

Warunek na ekstremum warunkowe funkcji F można więc napisać

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{-\frac{\partial f}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0 \tag{18}$$

Ten sam wynik można otrzymać budując funkcję $\Phi(x, y) = F(x, y) - \lambda f(x, y)$ i pisząc warunki konieczne na ekstremum funkcji Φ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Wyznaczenie λ z drugiego równania i wstawienie do pierwszego odtwarza wcześniejszy wynik na ekstremum warunkowe. Wynik ten uogólnia się dla przypadku większej liczby zmiennych i warunków. Dlatego

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(V - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k) = 0, \quad j = 1, 2, ..., 3N, \tag{20}$$

jest warunkiem koniecznym na ekstremum lub punkt siodłowy.

1.4 Przykład: wahadło płaskie

Rozważmy punkt materialny o masie m poruszający się po pionowo ustawionym okręgu o promieniu R w polu grawitacyjnym. Skierujmy oś x poziomo, oś y pionowo w dół, a oś z prostopadle do płaszczyzny (xy). Równania więzów mają postać: $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, $f_2(x, y, z) = z = 0$. Równania Lagrange'a mają postać

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1 2x, \\ m\ddot{y} &= mg + \lambda_1 2y, \\ m\ddot{z} &= \lambda_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Wobec równania $z = 0$, zachodzi $\ddot{z} = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Równania dla składowych x i y można przekształcić. Dwukrotne zróżniczkowanie równania więzów daje $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ i $\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0$. Pomnożenie pierwszego z równań ruchu przez x, drugiego przez y i dodanie daje

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = 2\lambda_1 x^2 + 2\lambda_1 y^2 + mgy. \tag{22}$$

Po wykorzystaniu równania więzów oraz relacji otrzymanej w wyniku dwukrotnego różniczkowania równania więzów otrzymuje się

$$m(-\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 2\lambda_1 R^2 + mgy, \tag{23}$$

co pozwala otrzymać wartość λ. Po wstawieniu do równań ruchu identyfikujemy składowe siły reakcji

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= 2\lambda_1 x = 2\frac{m(-\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - mgy}{2R^2} x, \\ F_{Ry} &= 2\lambda_1 y = 2\frac{m(-\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - mgy}{2R^2} y. \end{aligned} \tag{24}$$

Siła reakcji równoważy składową siły ciężkości prostopadłą do okręgu oraz dostarcza siły dośrodkowej zakrzywiającej tor. Wynik ten można oczywiście otrzymać metodą elementarną. Problem wahadła będzie dyskutowany później.

1.5 Przykład: Dwa połączone punkty materialne na paraboli

Weźmy 2 punkty materialne o masach m_1 i m_2 poruszające się po pionowo ustawionej paraboli $f_1(x,y,z) = y - x^2$, $z = 0$ w polu grawitacyjnym. Oś x jest pozioma, oś y skierowana jest pionowo w górę. Ciała są połączone nieważkim prętem o długości l. Równania więzów są

$$f_1 = y_1 - x_1^2 = 0,$$

$$f_2 = y_2 - x_2^2 = 0, \tag{25}$$

$$f_3 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0 \tag{26}$$

$$f_4 = z_1 = 0, \tag{27}$$

$$f_5 = z_2 = 0. \tag{28}$$

Równania Lagrange'a mają postać

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_3(x_1 - x_2),\\
m_1\ddot{y}_1 &= -m_1 g + \lambda_1 + 2\lambda_3(y_1 - y_2),\\
m_2\ddot{x}_2 &= -2\lambda_2 x_2 - 2\lambda_3(x_1 - x_2),\\
m_2\ddot{y}_2 &= -m_2 g + \lambda_2 - 2\lambda_3(y_1 - y_2),\\
m_1\ddot{z}_1 &= \lambda_4,\\
m_2\ddot{z}_2 &= \lambda_5.
\end{aligned} \tag{29}$$

Łatwo zauważyć, że $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Warunek równowagi otrzymamy kładąc przyspieszenia równe zero. Współczynniki $\lambda_{1,2,3}$ można wyznaczyć z trzech powyższych równań; czwarte razem z równaniami więzów pozwalają w zasadzie wyliczyć współrzędne punktu równowagi.

Układ równań nie jest prosty do rozwiązania. Można sprawdzić, że dla $m_1 = m_2$ rozwiązaniem jest $x_1 = -x_2 = \frac{l}{2}$.

2 Zasada d'Alamberta

Zasada d' Alamberta jest innym, równoważnym sformułowaniem praw ruchu. Nie używa czynników Lagrange'a, za to wprowadza pojęcie przesunięcia wirtualnego. Jest to przesunięcie δx_j zgodne z więzami, czyli styczne do hiperpowierzchni więzów $f_k(x,t)=0$, $k=1,2,...p$, tzn. spełniające warunek

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j}\delta x_j = 0. \quad k=1,2,...,p. \tag{30}$$

Zasada ta mówi, że w układzie N punktów materialnych z p więzami holonomicznymi dwustronnymi $f_k(x,t)=0$, $k=1,...,p$, ruch odbywa się tak, że

$$\sum_{j=1}^{3N}(m_j\ddot{x}_j - X_j)\delta x_j = 0. \tag{31}$$

Równoważność zasady d'Alamberta i równań Lagrange'a I rodzaju można wykazać biorąc równania Lagrange'a dla zmiennej j, mnożąc je przez przesunięcie wirtualne δx_j i sumując po j

$$\sum_{j=1}^{3N}(m_j\ddot{x}_j - X_j - \sum_{k=1}^{p}\lambda_k\frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j})\delta x_j = 0. \tag{32}$$

W podwójnej sumie suma po j znika dla każdego k z definicji przesunięcia wirtualnego. Stąd

$$\sum_{j=1}^{3N}(m_j\ddot{x}_j - X_j)\delta x_j = 0. \tag{33}$$

Zatem z równań Lagrange'a wynika zasada d'Alamberta.

Dowód w drugą stronę jest trochę bardziej skomplikowany. Załóżmy, że

$$\sum_{j=1}^{3N}(m_j\ddot{x}_j - X_j)\delta x_j = 0. \tag{34}$$

Odejmijmy od tego $\sum_k \lambda_k \sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\delta x_j = 0$, z nieokreślonymi na razie współczynnikami λ_k. Otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{3N}(m_j\ddot{x}_j - X_j - \sum_{k=1}^{p}\lambda_k\frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j})\delta x_j = 0. \tag{35}$$

Ponieważ δx_j nie są niezależne, nie można jeszcze wnosić, że spełnione są równania Lagrange'a, czyli że znika każdy wyraz sumy po j. Należy skorzystać z tego, że więzy są niezależne (inaczej niektóre równania więzów byłyby niepotrzebne). Oznacza to, że w macierzy $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ istnieje niezerowy wyznacznik rzędu p. Niech to będzie wyznacznik zbudowany z pochodnych z $j, k = 1, ...p$. Warunek na przesunięcia wirtualne można napisać w postaci

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j} \delta x_j = -\sum_{j=p+1}^{3N} \frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j} \delta x_j, \quad k = 1, ...p. \tag{36}$$

Należy to potraktować jako układ równań na δx_j, $j = 1, ..., p$, przy czym wyznacznik układu jest niezerowy. Stąd δx_j, $j = p+1, p+2, ..., 3N$, można potraktować jako niezależne parametry, a δx_j, $j = 1, 2, ..., p$ - jako wyznaczone jednoznacznie z układu równań. Rozdzielając sumę na wyrazy z $j = 1, 2, ..., p$ oraz $j = p+1, p+2, ..., 3N$ można napisać

$$\sum_{j=1}^{p} (m_j \ddot{x}_j - X_j - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j}) \delta x_j + \sum_{j=p+1}^{3N} (m_j \ddot{x}_j - X_j - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j}) \delta x_j = 0. \tag{37}$$

Przez odpowiedni wybór λ_k można spowodować, że

$$m_j \ddot{x}_j - X_j - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, ..., p. \tag{38}$$

W pozostałej sumie δx_j, $j = p+1, p+2, ...3N$ są dowolne, a więc muszą zerować się stojące przy nich wspó czynniki

$$m_j \ddot{x}_j - X_j - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x_j} = 0, \quad j = p+1, p+2, ..., 3N. \tag{39}$$

zatem spełnione są równania Lagrange'a.

Położenie w zasadzie d'Alamberta dla wszystkich j przyspieszeń $\ddot{x}_j = 0$, a także prędkości $\dot{x}_j = 0$, jeśli siły zależą od prędkości, daje warunek równowagi

$$\sum_{j=1}^{3N} X_j \delta x_j = 0. \tag{40}$$

Poniżej podane są przykłady, rozważane już wyżej.

2.1 Wahadło płaskie

Dla rozważanego w poprzednim rozdziale wahadła płaskiego otrzymujemy

$$m\ddot{x}\delta x + (m\ddot{y} - mg)\delta y + m\ddot{z}\delta z = 0, \tag{41}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0, \\ &1\delta z = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Otrzymujemy $\delta z = 0$, $x\delta x + y\delta y = 0$ i dalej, wyrażając δy przez δx

$$[m\ddot{x} + (m\ddot{y} - mg)\frac{-x}{y}]\delta x = 0. \tag{43}$$

Ponieważ δx jest już dowolne (a zależne od niego δy zostało już wyeliminowane), można wnosić o zerowaniu się wyrazu w nawiasie kwadratowym. Razem z równaniem więzów tworzą układ 2 równań z 2 niewiadomymi x, y.

2.2 Przykład: Dwa połączone punkty materialne na paraboli

Dla tego przykładu zasada d'Alamberta mówi

$$m_1\ddot{x}_1\delta x_1 + (m_1\ddot{y}_1 + m_1 g)\delta y_1 + m_1\ddot{z}_1\delta z_1 + m_2\ddot{x}_2\delta x_2 + (m_2\ddot{y}_2 + m_2 g)\delta y_2 + m_2\ddot{z}_2\delta z_2 = 0, \tag{44}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &-2x_1\delta x_1 + 1\delta y_1 = 0, \\ &-2x_2\delta x_2 + 1\delta y_2 = 0, \\ &2(x_1 - x_2)\delta x_1 + 2(y_1 - y_2)\delta y_2 - 2(x_1 - x_2)\delta x_2 - 2(y_1 - y_2)\delta y_2 = 0, \\ &1\delta z_1 = 0, \\ &1\delta z_2 = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Szukając położenia równowagi kładziemy wszystkie przyspieszenia równe zero. Z ostatnich równań można wyrazić trzy przesunięcia wirtualne przez czwarte, np. δx_1. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= 2x_1\delta x_1,\\ \delta y_2 &= 2x_2\delta x_2 \\ \delta x_2 &= \frac{x_1 - x_2 + 2x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2 + 2x_2(y_1 - y_2)}\delta x_1.\end{aligned} \tag{46}$$

Warunek równowagi ma więc postać

$$[m_1 g 2x_1 + m_2 g 2x_2 \frac{x_1 - x_2 + 2x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2 + 2x_2(y_1 - y_2)}]\delta x_1 = 0. \tag{47}$$

Ponieważ δx_1 jest dowolne (a inne przesunięcia wirtualne zostały już uzależnione od δx_1), wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe zero. Razem z równaniami więzów stanowią układ 4 równań z 4 niewiadomymi na punkt położenia równowagi.

2.3 Przykład: Łańcuch

Niech dany będzie łańcuch o N ogniwach, z których każde ma masę m i długość $2a$. Łańcuch zawieszony jest na jednym końcu w początku układu, a na drugi koniec działa pozioma siła F. Niech oś x jest pozioma, a oś y - skierowana w dół.

Niech (x_j, y_j) będzie położeniem środka ciężkości $j-tego$ ogniwa, a (X, Y) - położeniem końca łańcucha. Zasada d'Alamberta daje warunek na położenie równowagi

$$\sum_{j=1}^{N} mg\delta y_j + F\delta X = 0. \tag{48}$$

Zamiast wyrażać jedne przesunięcia wirtualne przez inne, wygodniej jest wyrazić wszystkie przez pewien zespół przesunięć niezależnych. Mogą to być kąty α_j odchylenia ogniw od pionu. Zachodzi

$$\begin{aligned}y_1 &= a\cos\alpha_1,\\ y_2 &= 2a\cos\alpha_1 + a\cos\alpha_2, \qquad (49)\\ y_j &= 2a\sum_{k=1}^{j-1}\cos\alpha_k + a\cos\alpha_j \qquad (50)\\ X &= \sum_{k=1}^{N} 2a\sin\alpha_k. \qquad (51)\end{aligned}$$

Zasada d'Alamberta daje

$$mg\sum_{j=1}^{N}(\sum_{k=1}^{j-1}(-2a\sin\alpha_k)\delta\alpha_k + a(-sin\alpha_j)\delta\alpha_j) + F\sum_{j=1}^{N}2a\cos\alpha_j\delta\alpha_j = 0. \quad (52)$$

Po przegrupowaniu wyrazów otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{N}[-mg\sin\alpha_j(2N-2j+1) + 2F\cos\alpha_j]\delta\alpha_j = 0. \quad (53)$$

Ponieważ przesunięcia $\delta\alpha_j$ są dowolne, zerować muszą się współczynniki stojące przy każdym z nich. Oznacza to, że łańcuch jest w równowadze, gdy $\mathrm{tg}\alpha_\mathrm{j} = \frac{\mathrm{2F}}{\mathrm{mg(2N-2j+1)}}$.