Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.3

1 Układy punktów materialnych

Metody opisu jednej cząstki dają sią łatwo uogólnić dla przypadku N punktów materialnych. Niech $i - ty$ punkt materialny ma współrzędną $\mathbf{r}_i$ i masę m_i. Równania Newtona dla $i - tego$ punktu materialnego ma postać

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \equiv \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{F}_i$ jest siłą działającą na ten punkt materialny. Siłę tę można podzielić na siłę zewnętrzną $\mathbf{F}_{i0}$ oraz sumę sił $\mathbf{F}_{ij}$ pochodzących od innych punktów materialnych układu numerowanych przez j

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i0} + \sum_{j, j \neq i} \mathbf{F}_{ij}. \tag{2}$$

Trzecia zasada dynamiki mówi, że $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, nie wchodząc w istotę i pochodzenie oddziaływań.

Równania Newtona tworzą układ $3N$ równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu. Dla warunków początkowych $\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}$, $\dot{\mathbf{r}}_i(t_0) = \mathbf{v}_{i0}$ i dostatecznie regularnych funkcji $\mathbf{F}_i$ rozwiązania isnieją i są jednoznaczne.

1.1 Zasada zachowania pędu

Peęd układu jest sumą pędów wszystkich punktów materialnych

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \tag{3}$$

Korzystając z równań Newtona dla poszczególnych punktów materialnych otrzymuje się

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}, \tag{4}$$

czyli

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{F}_{i0} + \sum_{j,j\neq i} F_{ij}) = \sum_i \mathbf{F}_{i0} = \mathbf{F}_0, \tag{5}$$

gdzie skorzystano z faktu, że wobec spełnienia trzeciej zasady dynamiki dla każej siły wewnętrznej istnieje inna, o tej samej wartości i przeciwnie skierowana; zatem suma sił wewnętrznych jest równa zero. Siła $\mathbf{F}_0$ jest wypadkową sił zewnętrznych.

Jeśli wypadkowa sił zewnętrznych jest równa zero, to całkowity pęd układu jest zachowany.

1.2 Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu układu punktów materialnych jest sumą momentów pędu jego elementów

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{J}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \tag{6}$$

Różniczkując ostatnią relację względem czasu otrzymuje się

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{D}_i \equiv \mathbf{D}, \tag{7}$$

gdzie skorzystano z faktu, że wektory $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ oraz $\mathbf{p}_i$ są równpległe. $\mathbf{D}_i$ jest momentem siły działającym na $i-te$ ciało, a $\mathbf{D}$ jest wypadkowym momentem siły.

Wypadkowy moment siły można wyrazić przez wkłady od sił zewnętrznych i wewnętrznych, dopuszczając oznaczenie $\mathbf{F}_{ii} \equiv 0$

$$\mathbf{D} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_{i0} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i0} + \sum_{ij} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}. \tag{8}$$

Jeśli siły wewnętrzne spełniają trzecią zasadę dynamiki, drugi wyraz można przepisać zamieniając w pewnym miejscu rolami indeksy i oraz j

$$\frac{1}{2}\sum_{ij} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{ij} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{ji} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{ij} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}. \tag{9}$$

Jeżeli siły wewnętrzne są centralne, tzn. wektor $\mathbf{F}_{ij}$ jest równoległy do wektora $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, to wypadkowy moment sił wewnętrznych znika.

Tak więc jeśli wypadkowy moment siły jest równy zero, to wypadkowy moment pędu jest zachowany. Zachodzi to w szczególności, gdy wypadkowy moment sił zewnętrznych znika, a siły wewnętrzne są centralne.

1.3 Zasada zachowania energii

Weźmy równania Newtona dla $i - tego$ ciała, pomnóżmy obie strony przez $\dot{\mathbf{r}}_i$ i wysumumy po i. Otrzymamy

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i. \tag{10}$$

Lewa strona jest pochodną funkcji $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$, która jest energią kinetyczną układu jako suma energii kinetycznych jego składników. Całkując obie strony po czasie otrzmamy

$$\int_{t_0}^{t^1} \frac{dT}{dt} = T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i dt. \tag{11}$$

Prawa strona reprezentuje pracę wykonaną na układzie jako sumę prac wykonanych na jego elementach.

Ważny jest przypadek sił potencjalnych, tzn. takich, że istnieje funkcja $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ...\mathbf{r}_N, t)$, takich że $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$, gdzie indeks i przy nabli sygnalizuje, względem współrzędnych którego ciała zachodzi różniczkowanie. Jeśli siły są zachowawcze, funkcja V nie zależy od czasu i reprezentuje energię potencjalną. Wtedy

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \nabla_i V \dot{\mathbf{r}}_i dt = -\sum_i \int_{C_i} \nabla_i V d\mathbf{r}_i = \tag{12}$$
$$-\int dV = -(V(\mathbf{r}_1(t_1), \mathbf{r}_2(t_1), ...\mathbf{r}_N(t_1)) - V(\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0), ...\mathbf{r}_N(t_0)) = -(V(t_1) - V(t_0)).$$

C_i jest trajektorią $i - tego$ punktu materialnego.

Gdy istnieje energia potencjalna V, energia całkowita $T + V$ jest zachowana.

1.4 Środek masy

Środek masy jest punktem zdefiniownym jako

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}. \tag{13}$$

Wyznacza więc średnie ważone położenie mas układu. Oznaczmy sumę mas przez $M = \sum_i m_i$.

Przy zmianie układu odniesienia wektor położenia środka masy transformuje się jak wszystkie wektory

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i, \tag{14}$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}'. \tag{15}$$

Równania ruchu środka masy można otrzymać sumując stronami równania ruchu dla poszczególnych punktów materialnych

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i, \tag{16}$$

czyli

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}. \tag{17}$$

Oznacza to że środek masy porusza się tak, jakby poruszał się fikcyjny punkt o masie równej sumie mas wszystkich ciał układu pod wpływem wypadkowej wszystkich sił działających w układzie.

Całkowity pęd układu $\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M\dot{\mathbf{R}}$.

Moment pędu środka masy jest równy $\mathbf{R} \times \mathbf{p}$ i spełnia równanie

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R} \times \mathbf{p} = \frac{d}{dt}\mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}. \tag{18}$$

Zmiana momentu pędu środka masy na jednostkę czasu jest równa momentowi wypadkowej siły zaczepionej w środku masy.

Wprowadźmy wektory $\mathbf{r}_i^S$, określające położnie względem środka masy, tzn

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i^S. \tag{19}$$

Moment pędu układu wyraża się jako

$$\begin{aligned}\mathbf{J} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i^S) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}_i^S) = \\ M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_i m_i \mathbf{r}_i^S \times \dot{\mathbf{r}}_i^S = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{J}^S,\end{aligned} \tag{20}$$

gdzie $\mathbf{J}^S$ jest momentem pędu względem środka masy. Skorzystano z faktu, że $\sum_i m_i \mathbf{r}_i^S = \sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = 0$ (jest to położenie środka masy względem środka masy.

Moment siły można wyrazić jako

$$\mathbf{D} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i^S) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{D}^S, \tag{21}$$

czyli moment siły jest równy sumie momentu siły względem środka masy oraz momentu siły wypadkowej zaczepionej w środku masy, względem początku układu.

Pochodną momentu pędu można napisać jako

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{J}^S) = M\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} + \frac{d\mathbf{J}^S}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \frac{d\mathbf{J}^S}{dt}. \tag{22}$$

Wielkość ta musi być równa $\mathbf{D} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{D}^S$. Wynika stąd, że spełnione jest równanie

$$\frac{d\mathbf{J}^S}{dt} = \mathbf{D}^S. \tag{23}$$

Jest to równanie analogiczne do równania obowiązującego w układzie inercjalnym, choć środek masy w ogólności nie spoczywa w żadnym układzie inercjalnym.

Pochodna $\frac{d}{dt}$ jest wykonana w układzie U lub w innym układzie inercjalnym, na przykład w układzie zaczepionym w środku masy i nieobracającym się względem układu inercjalnego (tzw. układzie środka masy).

Energia kinetyczna układu punktów materialnych wyraża się przez współrzędne środka masy

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}_i^S)^2 = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\mathbf{r}}_i^S)^2 = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + T^S, \tag{24}$$

gdzie T^S jest energią kinetyczną ruchu względem środka masy. Skorzystano znów z faktu, że $\sum_i m_i \mathbf{r}_i^S = 0$

2 Zagadnienie 2 ciał

Rozważmy 2 punkty materialne 1 i 2, o masach m_1 i m_2 i współrzędnych $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$. Siła oddziaływania zależy od ich odległości i jest centralna, tzn.

$$\mathbf{F}_{12} = F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \tag{25}$$

Od pewnego momentu będziemy zakładać, że siła jest grawitacyjna lub kulombowska, tzn. $V(r) = \frac{\alpha}{r}$, gdzie odpowiednio $\alpha = -Gm_1m_2$ lub $\alpha = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}$. ($G$ jest stałą grawitacji, Q_i - ładunkiem. Siła ma wtedy postać $\mathbf{F} = -\nabla\frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$. Parametr α jest ujemny dla oddziaływań przyciągających, a dodatni dla odpychających. W przypadku oddziaływań grawitacyjnych możemy myśleć o ciele 1 jak o planecie, a o ciele 2 jak o Słońcu. Równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{12}, \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \end{aligned} \tag{26}$$

2.1 Eliminacja ruchu środka masy

Wprowadźmy współrzędne środka masy $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$ i względne $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Oznaczmy $M = m_1 + m_2$. Dodanie równań ruchu ruchu daje

$$M\ddot{\mathbf{R}} = 0, \tag{27}$$

gdzie $M = m_1 + m_2$. Środek masy porusza się więc ruchem jednostajnym.

Dzieląc pierwsze równanie ruchu przez m_1, a drugie przez m_2 i odemując otrzymujemy

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F_{12}}(\mathbf{r}), \tag{28}$$

gdzie $\mu = \frac{m_1m_2}{M} = \frac{m_1}{1+\frac{m_1}{m_2}}$ jest tzw. masą zredukowaną.

Współrzędne $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ wyrażają się przez $\mathbf{R}$ i $\mathbf{r}$ jako

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2\mathbf{r}}{M}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1\mathbf{r}}{M}. \end{aligned} \tag{29}$$

Energię kinetyczną i moment pędu można obliczyć

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2,, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{r}_1 \times m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Pomijając ruch środka masy, mamy więc do czynienia z opisem ruchu fikcyjnego ciała o masie zredukowanej poruszającego się względem centrum siły umieszczonego w początku układu. Należy zwrócić uwagę, że przy masie m_2 znacznie większej od m_1 (jak w Układzie Słonecznym) masa zredukowana niewiele różni się od masy m_1; przy równych masach $\mu = \frac{1}{2}m_{1,2}$.

2.2 Współrzędne biegunowe

Siła jest centralna, a więc moment pędu $\mathbf{J}^S = \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}}$ jest zachowany. Oznacza to, że istnieje kierunek, do którego zarówno $\mathbf{r}$ jak i $\dot{\mathbf{r}}$ są prostopadłe. Wybierzmy układ, w którym $\mathbf{J}^S$ jest skierowany wzdłuż osi z, a ruch zachodzi w płaszczyźnie (xy) . Wprowadźmy współrzędne biegunowe

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi, \\ y &= r\sin\phi. \end{aligned} \tag{31}$$

Różniczkując te relacje otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\dot{\phi}, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\phi + r\cos\phi\dot{\phi}, \\ \ddot{x} &= \ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\sin\phi\dot{\phi} - r\cos\phi\dot{\phi}^2 - r\sin\phi\ddot{\phi}, \\ \ddot{y} &= \ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\cos\phi\dot{\phi} - r\sin\phi\dot{\phi}^2 + r\cos\phi\ddot{\phi}. \end{aligned} \tag{32}$$

Moment pędu i energia kinetyczna dają się zapisać jako

$$\begin{aligned} J^S &= J^S_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r^2\dot{\phi}. \\ T^S &= \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \end{aligned} \tag{33}$$

Pole zakreślane przez wektor wodzący w infinitezymalnym czasie dt wynosi $dS = \frac{1}{2}r^2 d\phi = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}dt = \frac{J^S}{2\mu}dt$. Zachowanie momentu pędu oznacza więc stałą prędkość polową $\frac{dS}{dt}$. Jest to treścią II prawa Keplera.

Równanie ruchu $\mu\ddot{\mathbf{r}} = F_{12}(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ rzutujemy na kierunek $\mathbf{r}$ mnożąc skalarnie przez $\frac{\mathbf{r}}{r}$. Otrzymuje się

$$\mu(\ddot{x}x + \ddot{y}y)\frac{1}{r} = \mu(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_{12}(r) = \frac{\alpha}{r^2}. \tag{34}$$

(Rzutowanie na kierunek prostopadły do $\mathbf{r}$ prowadzi do relacji zachowania momentu pędu, już znanej.)

W ostatnim równaniu można wyrazić $\dot{\phi}$ przez J^S otrzymując

$$\mu\ddot{r} - \frac{(J^S)^2}{\mu r^3} = F_{12}. \tag{35}$$

2.3 Trajektoria ruchu

Równanie to nie daje się łatwo rozwiązać. Obliczmy najpierw trajektorię ruchu $r = r(\phi)$. Wtedy $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{J^S}{\mu r^2} = -\frac{J^S}{\mu}\frac{d}{d\phi}\frac{1}{r}$ i dalej $\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = (\frac{d}{d\phi}\dot{r})\frac{d\phi}{dt} = \frac{J^S}{\mu r^2}\frac{-J^S}{\mu}\frac{d^2}{d^2\phi^2}\frac{1}{r} = -\frac{(J^S)^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{\phi^2}\frac{1}{r}$. Równanie przybiera więc postać dla siły $F_{12} = \frac{\alpha}{r^2}$

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = -\frac{\alpha\mu}{(J^S)^2} \equiv \frac{1}{p}. \tag{36}$$

Rozwiązanie tego równania łatwo znaleźć podstawiając roboczo $w = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$. Otrzymujemy wtedy

$$\frac{d^2}{d\phi^2}w + w = 0, \tag{37}$$

skąd $w = C\cos(\phi - \phi_0)$, a

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\phi - \phi_0)}, \tag{38}$$

gdzie ϵ=pC i ϕ_0 są stałymi, na razie nieznanymi. Zmiana ϕ_0 oznacza obrót trajektorii w układzie; położymy $\phi_0 = 0$.

Obliczmy energię całkowitą ruchu. Energia potencjalna dla siły $F_{12} = \frac{\alpha}{r^2}$ jest równa $V = \frac{\alpha}{r}$.

$$E^S = \frac{1}{2}\mu\frac{(J^S)^2}{\mu^2}(\frac{d}{d\phi}\frac{1}{r})^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\frac{(J^S)^2}{\mu^2 r^4} + \frac{\alpha}{r} = \tag{39}$$
$$\frac{(J^S)^2}{2\mu}\frac{\epsilon^2\sin^2\phi}{p^2} + \frac{(J^S)^2}{2\mu}\frac{(1+\epsilon\cos\phi)^2}{p^2} + \alpha\frac{1+\epsilon\cos\phi}{p} = \frac{\alpha^2\mu}{2(J^S)^2}(\epsilon^2 - 1).$$

Stała $\epsilon = \sqrt{1 + 2\frac{(J^S)^2 E^S}{\mu\alpha^2}}$.

W przypadku przyciągania p jest liczbą dodatnią. Jeśli energia jest ujemna, $\epsilon < 1$ i wszystkie wartości ϕ są dozwolone, r jest skończone, a krzywa jest zamknięta - jest to elipsa. Jeśli $E^S > 0$, trajektoria ucieka do nieskończoności, a ponieważ r nie może być ujemne, dozwolone są wartości ϕ takie, że $\cos\phi > -\frac{1}{\epsilon}$; trajektoria jest bliższą gałęzią hiperboli.

W przypadku odpychania $p < 0$, dozwolone są kąty takie, że $\cos\phi < -\frac{1}{\epsilon}$; trajektoria jest dalszą gałęzią hiperboli. Przypadek graniczny $E^S = 0$ odpowiada paraboli. Wnioski te będą uzasadnione niżej.

Równanie trajektorii można zapisać w lepiej rozpoznawalny sposób we współrzęzdnych kartezjańskch. Biorąc pod uwagę, że $x = r\cos\phi$ oraz $r = \sqrt{x^2+y^2}$ można napisać

$$\sqrt{x^2+y^2} = p - \epsilon x. \tag{40}$$

Podnosząc obie strony do kwadratu i przekształacając otrzymuje się dla $\epsilon \neq 1$

$$\frac{(x+\frac{p\epsilon}{(1-\epsilon^2)})^2}{\frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1-\epsilon^2)}} = 1. \tag{41}$$

Dla $\epsilon < 1$ jest to równanie elipsy o wielkiej półosi $a = \frac{p}{1-\epsilon^2}$ i małej półosi $b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$, przesuniętej w lewo o $f = \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}$. Wielkość f jest równa $f = \sqrt{a^2-b^2}$, czyli jest ogniskową elipsy. Udowodnione jest więc pierwsze prawo Keplera: trajektorią jest elipsa z centrum siły w ognisku. Okres T obiegu ciała po orbicie eliptycznej można obliczyć, korzystając z tego, że pole elipsy wynosi πab, a prędkość polowa $\frac{J^S}{2m}$

$$\frac{(J^S)^2}{4\mu^2}T^2 = \pi^2a^2b^2 = \pi^2a^3b\sqrt{1-\epsilon^2} = \pi^2a^3\frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\sqrt{1-\epsilon^2} = \pi^2a^3\frac{-(J^S)^2}{\mu\alpha}. \tag{42}$$

Stąd dla siły grawitacyjnej $T^2 = -\frac{4\pi^2\mu}{\alpha}a^3 = \frac{4\pi^2\mu}{Gm_1m_2}$. Ponieważ w przypadku Układu Słonecznego masa Słońca m_2 jest o kilka rzędów większa od masy planety, masa planety $m_1 \approx \mu$. Iloraz T^2 i a^3 jest wspólny dla wszystkich planet. Jest to trzecie prawo Keplera.

W przypadku $\epsilon > 1$ równanie trajektorii we współrzędnych kartezjańskich jest rozpoznanwane jako równanie hiperboli. Dla sił przyciągających $p > 0$, $\frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2} < 0$, hiperbola jest przesunięta w prawo w porównaniu z położeniem centralnym, trajektorią jest jej bliższa gałąź, a dozwolone są kąty takie, że $\cos\phi > -\frac{1}{\epsilon}$. Dla sił odpychających $p < 0$, $\frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2} > 0$, hiperbola jest przesunięta w lewo, trajektoria jest dalszą gałęzią hiperboli, a dozwolone są kąty takie, że $\cos\phi < -\frac{1}{\epsilon}$.

2.4 Zależność czasowa

Zależność współrzędnych od czasu, czyli właściwe rozwiązanie równanń ruchu po elipsie, można uzyskać z relacji

$$J^S = \mu r^2\frac{d\phi}{dt}. \tag{43}$$

co oznacza
$$\frac{J^S}{\mu}dt = r^2 d\phi = \frac{p^2 d\phi}{(1+\epsilon\cos\phi)^2}, \tag{44}$$
Obustronne scałkowanie powyższej relacji da funkcję $t = t(\phi)$, czyli odwrotną do poszukiwanej; całka nie jest jednak prosta do wykonania. Opłaca się wprowadzić zmienną u, będącą też kątem określającym położenie punktu na trajektorii, ale gdy początek układu wypada w geometrycznym środku elipsy, a nie w jej ognisku (jak w przypadku kąta ϕ). Kąt u definiujemy tak, że

$$\begin{aligned} x &= a\cos u - f = a(\cos u - \epsilon), \\ y &= b\sin u. \end{aligned} \tag{45}$$

Po wstawieniu tych związków można napisać

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = a(1-\epsilon\cos u), \tag{46}$$

gdzie skorzystano z relacji $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$. Prawdziwa jest relacja

$$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi} = a(1-\epsilon\cos u) \tag{47}$$

i jej różniczka
$$\frac{p\epsilon\sin\phi d\phi}{(1+\epsilon\cos\phi)^2} = a\epsilon\sin u du. \tag{48}$$
Dodatkowo zachodzi
$$y = r\sin\phi = b\sin u. \tag{49}$$
Używając tych relacji można napisać

$$\begin{aligned} \frac{J^S}{\mu}dt = r^2 d\phi = \frac{p^2 d\phi}{(1+\epsilon\cos\phi)^2} = \frac{pa\sin u du}{\sin\phi} = pa\frac{r}{b} = \\ \frac{pa^2}{b}(1-\epsilon\cos u)du = ab(1-\epsilon\cos u)du. \end{aligned} \tag{50}$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymujemy równanie Keplera

$$\frac{J^S}{\mu}(t-t_0) = ab(u-\epsilon\sin u). \tag{51}$$

Równanie to wyznacza zależność czasu od położenia na orbicie określonego przez kąt u; funkcja odwrotna stanowi rozwiązanie równania ruchu $u = u(t)$.

3 Wektor Rungego-Lenza

Wektor Rungego-Lenza jest jeszcze jedną stałą ruchu punktu materialnego w polu siły odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości. Jest zdefiniowny jako

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}^S + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{52}$$

obliczmy pochodną

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}^S + \dot{\mathbf{r}} \times \frac{d\mathbf{J}^S}{dt} + \alpha \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \alpha \mathbf{r} \frac{\dot{r}}{r^2} = \\ &\frac{\alpha \mathbf{r}}{\mu r^3} \times \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + \alpha \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \alpha \mathbf{r} \frac{\dot{r}}{r^2} = \\ &\frac{\alpha}{r^3}(\mathbf{r}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}) + \alpha \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \alpha \mathbf{r} \frac{\dot{r}}{r^2} = 0, \end{aligned} \tag{53}$$

gdzie skorzystano z tego, że $\mathbf{J}^S$ jest wielkością zachowaną oraz że $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ (to ostatnie wynika ze zróżniczkowania tożsamośi $\mathbf{r}^2 = r^2$).

Obliczmy

$$\mathbf{r}\mathbf{G} = rG\cos\phi = \mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}^S) + \alpha r = \mathbf{J}^S(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{(J^S)^2}{\mu} + \alpha r. \tag{54}$$

Tu ϕ jest kątem między $\mathbf{G}$ i $\mathbf{r}$. Stąd

$$r = \frac{\frac{(J^S)^2}{\mu}}{-\alpha + G\cos\phi} = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}, \tag{55}$$

Stałą $\epsilon = -\frac{G}{\alpha}$ wyznacza się obliczjąc energię, jak poprzednio.

W ten sposób, korzystając z dodatkowej stałej ruchu otrzymano trajektorię, bez całkowania równania ruchu. Stała ta jest związana ze ustaloną orientacją krzywej stożkowej na płaszczyźnie (xy).

4 Wzór Rutherforda

Innym aspektem zagadnienia 2 ciał jest problem efektywności rozpraszania pod wpływem siły odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości. Zadaje się tu inne pytanie i nie zachodzi potrzeba kompletnego rozwiązania równań ruchu.

Załóżmy, że na centrum rozpraszajęce w początku układu odniesienia pada punkt materialny. W granicy czasu zmierzającego do $-\infty$ jego prędkość wynosi v_0 i jest skierowana wzdłuż ujemnej części osi x, a odległość początkowa cząstki od osi x wynosi b (jest to tzw. parametr zderzenia). Ruch jest płaski w płaszczyźnie (xy), moment pędu jest zachowany i skierowany wzdłuż osi z, a jego długość wynosi $\mu v_0 b$. Pod wpływem siły $\mathbf{F} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ trajektoria odchyla się i dla czasów zmierzających do ∞ jest nachylona pod kątem θ do osi x. Współrzędna ϕ jest kątem nachylenia wektora $\mathbf{r}$ do osi x i zmienia się od π w $t \to -\infty$ do θ w $t \to \infty$.

Równanie ruchu w kierunku y ma postać

$$\mu \frac{dv_y}{dt} = F_y = \frac{\alpha}{r^2} \sin \phi. \tag{56}$$

Ponieważ $J^S = \mu r^2 \dot{\phi} = -\mu v_0 b$ można napisać

$$\mu \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\alpha}{v_0 b} \sin \phi \frac{d\phi}{dt}. \tag{57}$$

Całkując ostatnie równanie otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\alpha}{v_0 b} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \tag{58}$$

albo po zamianie zmiennych

$$\int_0^{v_0 \sin \theta} \mu dv_y = -\frac{\alpha}{v_0 b} \int_{\pi}^{\theta} \sin \phi d\phi \tag{59}$$

i dalej

$$v_0 \sin \theta = \frac{\alpha}{\mu v_0 b}(1 + \cos \theta). \tag{60}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$b = \frac{\alpha}{\mu v_0^2} \mathrm{ctg} \frac{\theta}{2}. \tag{61}$$

Oznacza to, że cząstki padające z parametrem zderzenia b zostaną rozproszone po kątem θ spełniającym ostatnią relację.

Aby porównać wynik z doświadczeniami zderzeniowymi problem formułuje się inaczej. Niech liczba cząstek padających na jednostkę powierzchni w jednostce czasu wynosi n. Weźmy pierścień o promieniu b i szerokości db; jego powierzchnia wynosi $2\pi bdb$. Liczba cząstek padających na pierścień w jednostce czasu wynosi $n2\pi bdb$. Te cząstki zostaną rozproszone do obszaru pomiędzy stożkami o kącie rozwarcia między θ a $\theta + d\theta$. Mamy

$$n2\pi|bdb| = n2\pi\frac{\alpha^2}{\mu^2 v_0^4}\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta = \mathrm{n}2\pi\frac{\alpha^2}{2\mu^2\mathrm{v}_0^4}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta. \tag{62}$$

Kąt bryłowy odpowiadający obszarowi między stożkami wynosi $2\pi\sin\theta = 2\pi 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$. Liczba cząstek rozproszonych w jednostce czasu do jednostkowego kąta bryłowego podzielona przez liczbę cząstek padających na jednostkę powierzchni w jednostce czasu wynosi więc

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v_0^4}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{63}$$

Ω jest kątem bryłowym, $d\Omega = sin\theta d\theta d\phi$. Wielkość $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ nazywa się różniczkowym przekrojem czynnym na rozpraszanie i ma miano powierzchni. Formuła z ostatniej relacji nazywa się wzorem Rutherforda. Interesujące jest, że formuła kwantowa, uzyskana w zupełnie odmiennym formalizmie, daje taki sam wynik. Wzór ten zastosowany do opisu rozproszenia cząstek α na cienkiej folii złota pozwolił wyjaśnić, dlaczego niektóre cząstki odchylały się bardziej niż inne. Był to dowód na ziarnistą strukturę materii.