Andrzej Raczyński

Mechanika klasyczna cz.2

W tym rozdziale podane zostaną przykłady rozwiązań równań Newtona dla punktu materialnego.

1 Oscylator harmoniczny

Rozważmy jednowymiarowy oscylator harmoniczny z tłumieniem i periodycznym wymuszaniem. Opisany jest równaniem

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F\cos\Omega t, \tag{1}$$

gdzie siła jest wprost proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie skierowana, siła tłumienia jest proporcjonalna do prędkości i skierowana przeciwnie do prędkości, F i Ω są odpowiednio amplitudą i częstością siły wymuszającej. Wprowadźmy oznaczenia $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $2b = \frac{\gamma}{m}$, $f = \frac{F}{m}$. Korzystamy z faktu,.ze równanie jest liniowe. Można wtedy napisać siłę wymuszają w postaci zespolonej, rozwiązać równanie i wziąć część rzeczywistą rozwiązania jako mającą sens fizyczny. Otrzymujemy równanie

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = f\exp(i\Omega t). \tag{2}$$

Jest to równanie różniczkowe, liniowe, niejednorodne, o współczynnikach stałych. Rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego otrzymuje się, biorąc rozwiązanie ogólne równania jednorodnego i dodając do niego rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Rozważmy najpierw równanie

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{3}$$

Rozwiązanie można zgadnąć, postulując jego wykładniczą postać

$$x(t) = \exp(\lambda t). \tag{4}$$

Wstawienie takiego rozwiązania do równania implikuje równanie kwadratowe na stałe λ

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0 \tag{5}$$

i dwie wartości stałej

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}. \tag{6}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest superpozycją

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t), \tag{7}$$

gdzie $C_{1,2}$ są stałymi, które wyznaczy się z warunków początkowych. W wyjątkowej sytuacji, gdy $\lambda_1 = \lambda_2$ rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = \exp(\lambda_1 t)(C_1 + C_2 t). \tag{8}$$

Jakościowe zachowanie rozwiązania zależy od siły tłumienia. W warunkach słabego tłumienia $b < \omega$ rozwiązanie można napisać jako

$$x(t) = \exp(-bt)(C_1 \exp(i\tilde{\omega}t) + C_2 \exp(-i\tilde{\omega}t) = \exp(-bt)(A \cos \tilde{\omega}t + B \sin \tilde{\omega}t, \tag{9}$$

gdzie nieznane stałe A, B wyrażają się przez nieznane stałe $C_{1,2}$: $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$. Jest to więc ruch oscylacyjny tłumiony, z częstością $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - b^2}$. Częstość oscylacji jest więc zmniejszona w porównaniu z częstością ω oscylatora nietłmionego.

W przypadku silnego tłumienia $b > \omega$ oba rozwiązania $\lambda_{1,2}$ są rzeczywiste. Rozwiązanie jest więc złożeniem dwóch rozwiązań tłumionych wykładniczo z różnymi stałymi tłumienia. Przypadek $\lambda_1 = \lambda_2$ odpowiada tłumieniu wolniejszemu niż w przypadku silnego tłumienia.

Rozwiązanie równania niejednorodnego można zgadnąć, podstawiając

$$x(t) = M \exp(i\Omega t), \tag{10}$$

co powadzi do relacji

$$(-\Omega^2 + 2bi\Omega + \omega^2)M = f. \tag{11}$$

Zespoloną stałą M daje się napisać jako

$$M = |M| \exp(i\phi), \tag{12}$$

gdzie

$$\begin{gathered} |M| = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+4b^2\Omega^2}}, \\ \phi = \mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{b}}{\omega^2-\Omega^2}. \end{gathered} \tag{13}$$

Ostatecznie pełne rozwiązanie można napisać jako ($\Re$ oznacza część rzeczywistą)

$$x(t) = \Re\{C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + |M| \exp(i\phi) \exp(i\Omega t)\}. \tag{14}$$

Na przykład w przypadku słabego tłumienia otrzymujemy

$$x(t) = \exp(-bt)(A \cos \tilde{\omega} t + B \sin \tilde{\omega} t) + \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi). \tag{15}$$

Po dostatecznie długim czasie drgania z częstością $\tilde{\omega}$ zostają stłumione. Pozostają drgania o częstości wymuszającej Ω. Maksymalną amplitudę drgań otrzymuje się przy częstości wymuszającej $\Omega = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}$, co można stwierdzić, szukając maksimum $|M|$ jako funkcji Ω. Stałe $C_{1,2}$ wyznacza się z warunków początkowych, np. $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, co daje w ostatnim przypadku

$$\begin{aligned} x_0 &= A + \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} \cos(\phi), \\ v_0 &= -bA + \tilde{\omega} B - \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} \sin(\phi). \end{aligned} \tag{16}$$

2 Ruch naładowanej cząstki w stałym polu elektromagnetycznym (K)

Na cząstkę o masie m i ładunku q działa siła Lorentza i równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \tag{17}$$

2.1 Pola równoległe

Skierujmy oba pola wzdłuż osi z, tzn. $\mathbf{E} = (0, 0, E)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q\dot{y}B, \\ m\ddot{y} &= -q\dot{x}B, \\ m\ddot{z} &= qE. \end{aligned} \tag{18}$$

Trzecie równanie nie jest sprzężone w pierwszymi dwoma i można je łatwo rozwiązać

$$\dot{z} = \frac{qE}{m} t + C_1,$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 + C_1 t + C_2. \tag{19}$$

Przy warunkach początkowych $z(t = 0) = z_0$, $z(t \dot{=} 0) = v_{0z}$ stałe można wyznaczyć i rozwiązanie ma postać

$$z(t) = \frac{1}{2} qEt^2 + v_{0z} t + z_0. \tag{20}$$

Jest to ruch jednostajnie przyspieszony.

Pozostałe równania są sprzężone; można je rozwiązać wprowadzając zespoloną zmienną $\eta = x + iy$. Spełnia ona równanie

$$\ddot{\eta} + i\omega\dot{\eta} = 0, \tag{21}$$

gdzie wprowadzono wielkość $\omega = \frac{qB}{m}$ o mianie częstości. Równanie to można dwukrotnie scałkować

$$\dot{\eta} = C_3 \exp(-i\omega t),$$

$$\eta = iC_3 \frac{1}{\omega} \exp(-i\omega t) + C_4. \tag{22}$$

Zmienne x i y otrzymamy biorąc odpowiednio część rzeczywistą i urojoną zmiennej η

$$x = \frac{1}{\omega}(-C_3'' \cos\omega t + C_3' \sin\omega t) + C_4',$$

$$y = \frac{1}{\omega}(C_3' \cos\omega t + C_3'' \sin\omega t) + C_4'', \tag{23}$$

gdzie $C_{3,4} \equiv C_{3,4}' + iC_{3,4}''$. Rozwiązanie można napisać inaczej, wprowadzają stałe $M = |C_3|$, $\phi = \arg C_3$,

$$x = \frac{M}{\omega} \sin(\omega t - \phi) + C_4',$$

$$y = \frac{M}{\omega} \cos(\omega t - \phi) + C_4''. \tag{24}$$

Jest to ruch po okręgu o promieniu $\frac{M}{\omega}$ i środku w (C_4', C_4''). Stałe wyznacza się z warunków początkowych: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_{0x}$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_{0y}$.

2.2 Pola prostopadłe

Skierujmy pole **E** wzdłuż osi y, a pole **B** wzdłuż osi z. Równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q\dot{y}B, \\ m\ddot{y} &= qE - q\dot{x}B, \\ m\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Ruch w kierunku osi z jest więc jednostajny: $z = v_{0z}t + z_0$. Wprowadźmy znów zmienną $\eta = x + iy$. Otrzymamy równanie

$$\ddot{\eta} + i\omega\dot{\eta} = i\omega\gamma, \tag{26}$$

gdzie $\gamma = \frac{E}{B}$. Podstawmy $\xi = \dot{\eta}$. Otrzymamy

$$\dot{\xi} + i\omega\xi = i\omega\gamma \tag{27}$$

Podstawmy $\xi - \gamma = u$. Otrzymujemy

$$\dot{u} - i\omega u = 0. \tag{28}$$

Rozwiązaniem ostatniego równania jest $u = C_3 \exp(-i\omega t) = M \exp(-i(\omega t - \phi)$, gdzie zapisano stałą C_3 za pomocą amplitudy i fazy, Dla zmiennej η otrzymuje się

$$\dot{\eta} = \gamma + M \exp(-i(\omega t - \phi)). \tag{29}$$

Po scałkowaniu dostajemy

$$\eta = \gamma t + i\frac{M}{\omega} \exp(-i(\omega t - \phi)), \tag{30}$$

a dla części rzeczywistej i urojonej otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma t + \frac{M}{\omega} \sin(\omega t - \phi) + C_4', \\ y(t) &= \frac{M}{\omega} \cos(\omega t - \phi) + C_4''. \end{aligned} \tag{31}$$

Stałe otrzymujemy z warunków początkowych. Na przykład w przypadku $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} x &= \frac{\gamma}{\omega}(\omega t - \sin \omega t), \\ y &= \frac{\gamma}{\omega}(1 - \cos \omega t). \end{aligned} \tag{32}$$

Jest to równanie cykloidy, czyli krzywej, jaką zatacza punkt na obwodzie okręgu toczącego się bez poślizgu.

3 Spadanie z oporem ośrodka

Rozpatrzmy jednowymiarowy ruch w kierunku pionowym. Zakładamy, że siła oporu ośrodka jest liniową funkcją prędkości. Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{x} = -mg - \gamma\dot{x}, \tag{33}$$

lub

$$\ddot{x} + b\dot{x} = -g, \tag{34}$$

gdzie $b = \frac{\gamma}{m}$ jest współczynnikiem oporu na jednostkę masy.

Poszukujemy najpierw rozwiązania równania jednorodnego. Podstaawiając $x(t) = \exp(\lambda t)$, dostajemy równanie

$$\lambda^2 + b\lambda = 0, \tag{35}$$

o rozwiązaniach $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -b$. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego można zgadnąć jako $x(t) = -\frac{g}{b}t$. Zatem rozwiązanie ogólne pełnego równania ma postać

$$x = C_1 + C_2 \exp(-bt) - \frac{g}{b}t. \tag{36}$$

Niech $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Wtedy

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= x_0, \\ -bC_2 - \frac{g}{b} &= v_0. \end{aligned} \tag{37}$$

Po wyliczeniu stałych otrzymuje się

$$x(t) = x_0 + (v_0 + \frac{g}{b})\frac{1}{b}(1 - \exp(-bt)) - \frac{g}{b}t. \tag{38}$$

Prędkość ciała wynosi

$$v(t) = (v_0 + \frac{g}{b})\exp(-bt) - \frac{g}{b}. \tag{39}$$

Po dostatecznie długim czasie ciało spada ruchem jednostajnym z prędkością $v = -\frac{g}{b}$. Przy rzucie w górę ($v_0 > 0$), maksimum wysokości jest osiągane po czasie τ, gdy

$$0 = (v_0 + \frac{g}{b})\exp(-b\tau) - \frac{g}{b}. \quad (40)$$

Czyli po czasie $\tau = \frac{1}{b}\log(1 + \frac{bv_0}{g})$.

4 Ruch punktu o zmiennej masie

Rozważmy rakietę (traktowaną jako punkt materialny), startującą w górę. Wyrzuca ona gaz z prękością względną w. Pęd układu przed wyrzuceniem masy dm wynosi $(m+dm)v$. Po wyrzuceniu rakieta porusza się z prędkością $v + dv$, a wyrzucony gaz - z prękością $v + w$ (wszystko w układzie Ziemi). Bilans pędu ma więc postać

$$m(v + dv) + dm(v + w) - (m + dm)v = -mgdt \quad (41)$$

co prowadzi do równania

$$\frac{dv}{dt} + \frac{w}{m}\frac{dm}{dt} = -g. \quad (42)$$

Trzeba zadać funkcję charakteryzującą ubytek masy. Jeśli na przykład masa odrzucana w jednostce czasu jest stała, tzn. $\frac{dm}{dt} = -\alpha = const$, czyli $m = m_0(1 - \alpha t)$, to równanie sprowadza się do

$$\frac{dv}{dt} - w\alpha\frac{1}{m_0 - \alpha t} = -g. \quad (43)$$

Całkowanie równania daje (*log* jest logarytmem naturalnym)

$$v(t) = -gt - w\log(1 - \frac{\alpha t}{m_0}) + v_0 \quad (44)$$

i

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + \frac{m_0 w}{\alpha}[(1-\frac{\alpha t}{m_0})\log(1-\frac{\alpha t}{m_0}) - (1-\frac{\alpha t}{m_0})] + \frac{m_0 w}{\alpha} + x_0. \quad (45)$$

5 Modyfikacja ruchu cząstki w słabym polu magnetycznym

Wiadomo, że w układzie U ruch cząstki naładowanej pod wpływem siły $\mathbf{F}$ jest opisany równaniem $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Okazuje się że po włączeniu stałego pola magnetycznego ruch jest w przybliżeniu taki sam w układzie U' obracającym się względem U z odpowiednio dobraną prędkością kątową. Można to wykazać w sposób następujący.

W układzie U ruch cząstki opisany jest równaniem

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{46}$$

Weźmy układ U' obracający się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$. Wyrażając prędkość i przyspieszenie w U przez wielkości w U' otrzymujemy

$$m[\mathbf{a}' + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}')] = \mathbf{F} + q(\mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}') \times \mathbf{B}. \tag{47}$$

Dobierzmy $\vec{\omega}$ tak, aby zniosły się wyrazy zawierające $\mathbf{v}'$

$$2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}, \tag{48}$$

tzn. $\vec{\omega} = -\frac{q}{2m}\mathbf{B}$. W układzie U' spełnione jest więc równanie

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - \frac{q^2}{4m}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}') \times \mathbf{B}. \tag{49}$$

Jeśli pole magnetyczne jest słabe, to ostatni wyraz drugiego stopnia względem $\mathbf{B}$ jest do pominięcia; wtedy równanie ruchu jest takie samo, jak w układzie U bez pola magnetycznego.

6 Wahadło Foucaulta

Wahadła będą dyskutowane w dalszej części wykładu. Tu chodzi tylko o jeden aspekt wahadła matematycznego w przybliżeniu małych drgań.

Rozważmy najpierw wahadło matematyczne w układzie inercjalnym. Oś z wyznacza pion. Jeśli drgania zachodzą tylko w plaszczyźnie (xz), a ϕ jest kątem odchylenia od pionu, to $x = l \sin\phi$, $z = l \cos\phi$, gdzie l jest długością nici. Na punkt materialny działa siła ciężkości skierowana wzdłuż osi z oraz siła reakcji nici, skierowana wzdłuż nici, o wartości $R = mg\cos\phi + \frac{mv^2}{l}$. Równania ruchu mają postać

$$m\ddot{x} = -R\sin\phi = -(mg\cos\phi + \frac{mv^2}{l})\sin\phi,$$
$$m\ddot{z} = -mg + R\cos\phi = -mg + (mg\cos\phi + \frac{mv^2}{l})cos\phi. \tag{50}$$

W przybliżeniu małych drgań pozostają tylko wyrazy pierwszego rzędu ze względu na potęgę położeń i prędkości, $\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1$, $v^2 \approx 0$. Ruch w kierunku x jest opisany równaniem $\ddot{x} = -\omega^2 x$, gdzie $\omega^2 = \frac{g}{l}$, a ruch w kierunku z nie zachodzi w pierwszym rzędzie przybliżenia. Jeśli ruch może zachodzić także w kierunku y, równania ruchu mają postać

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$
$$\ddot{y} = -\omega^2 y. \tag{51}$$

Weźmy wahadło znajdujące się na szerokości geograficznej θ i opiszmy ruch w układzie U', zaczepionym w punkcie zawieszenia wahadła. Zorientujmy układ tak, aby składowe prędkości kątowej ruchu wirowego Ziemi były $\vec{\Omega} = (\Omega\cos\theta, 0, \Omega_{z'} \equiv \Omega\sin\theta)$. Równanie ruch ma postać

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -m\omega^2\mathbf{r}' - 2m\vec{\Omega}\times\mathbf{v}', \tag{52}$$

czyli

$$\ddot{x}' = -\omega^2 x' + 2\Omega_{z'}\dot{y}',$$
$$\ddot{y}' = -\omega^2 y' - 2\Omega_{z'}\dot{x}'. \tag{53}$$

Wprowadzając zmienną $\eta = x' + iy'$ i dodając pierwsze z równań do drugiego pomnożonego przez i otrzymujemy

$$\ddot{\eta} + \omega^2\eta + 2i\Omega_{z'}\dot{\eta} = 0. \tag{54}$$

Przyjęcie rozwiązania w postacji $\exp(\lambda t)$ prowadzi do równania na λ

$$\lambda^2 + 2i\Omega_{z'}\lambda + \omega^2 = 0, \tag{55}$$

i jego pierwiastków

$$\lambda_{1,2} = -i\Omega_{z'} \pm i\sqrt{\omega^2 + \Omega_{z'}^2} \equiv -i\Omega_{z'} \pm i\tilde{\omega}. \tag{56}$$

Rozwiązanie ogólne daje się zapisać jako

$$\eta = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) \equiv \exp(-i\Omega_{z'} t)(A_1 \cos\tilde{\omega}t + A_2 \sin\tilde{\omega}t), \quad (57)$$

gdzie $A_{1,2} \equiv A'_{1,2} + iA''_{1,2}$ są zespolonymi stałymi. Rozwiązania w zmiennych (x', y') otrzymamy biorąc odpowiednio część rzeczywistą i urojoną

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos\Omega_{z'} t(A'_1 \cos\tilde{\omega}t + A'_2 \sin\tilde{\omega}t) + \sin\Omega_{z'} t(A''_1 \cos\tilde{\omega}t + A''_2 \sin\tilde{\omega}t), \\ y'(t) &= -\sin\Omega_{z'} t(A'_1 \cos\tilde{\omega}t + A'_2 \sin\tilde{\omega}t) + \cos\Omega_{z'} t(A''_1 \cos\tilde{\omega}t + A''_2 \sin\tilde{\omega}t). \quad (58) \end{aligned}$$

Przy warunkach początkowych $x'(0) = x'_0$, $y'(0) = \dot{x}'(0) = \dot{y}'(0) = 0$, otrzymuje się w szczgólności

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos\Omega_{z'} t x'_0 \cos\tilde{\omega}t + \sin\Omega_{z'} t \frac{\Omega_{z'}}{\tilde{\omega}} x'_0 \sin\tilde{\omega}t, \\ y'(t) &= -\sin\Omega_{z'} t x'_0 \cos\tilde{\omega}t + \cos\Omega_{z'} t \frac{\Omega_{z'}}{\tilde{\omega}} x'_0 \sin\tilde{\omega}t. \quad (59) \end{aligned}$$

Inaczej

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_{z'} t & \sin\Omega_{z'} t \\ -\sin\Omega_{z'} t & \cos\Omega_{z'} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \cos\tilde{\omega}t \\ x'(0) \frac{\Omega_{z'}}{\tilde{\omega}} \sin\tilde{\omega}t \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Jest to równanie elipsy obracającej się z prędkością kątową $\Omega_{z'}$. Na biegunie prędkość ta wynosi $\frac{2\pi}{24h}$, na równiku spada do zera.