Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.15

1 Wyznaczanie pól wektorowych z ich źródeł

1.1 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Niech pole wektorowe $\mathbf{F}$ spełnia równania z danymi źródłami $\mathbf{A}$ i α

$$\begin{aligned}&\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{r}),\\ &\nabla \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{1}$$

w skończonym, jednospójnym obszarze V, ograniczonym powierzchnią zamkniętą S. Niech dane są składowe normalne pola $\mathbf{nF}$ na powierzchni S, gdzie $\mathbf{n}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni. Przy tych założeniach źródła $\mathbf{A}$ i α wyznaczają jednoznacznie pole $\mathbf{F}$.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że dwa różne pola $\mathbf{F}_j$, $j = 1, 2$, spełniają równania (1) i mają te same składowe normalne na powierzchni S. Oznaczmy $\mathbf{G} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$. Wtedy pole $\mathbf{G}$ spełnia równania

$$\begin{aligned}&\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) = 0,\\ &\nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}) = 0\end{aligned} \tag{2}$$

oraz $\mathbf{nG} = 0$ na powierzchni S.

Ponieważ rotacja $\mathbf{G}$ jest ˚’owna zero, pole to jest gradientem pewnego pola skalarnego χ, czyli $\mathbf{G} = \nabla\chi$. Stąd $\nabla\mathbf{G} = \nabla(\nabla\chi) = \nabla^2\chi = 0$.

Rozważmy wyrażenie

$$\begin{aligned}&\oint_S \chi\mathbf{G}d\mathbf{S} = \oint_S \chi(\nabla\chi)d\mathbf{S} = \int_V \nabla[\chi(\nabla\chi)]dV =\\ &\int_V [(\nabla\chi)^2 + \chi\nabla^2\chi]dV = \int_V \mathbf{G}^2 dV,\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie zamieniono całkę powierzchniową na objętościową oraz podziałano operatorem ∇ na iloczyn. Lewa strona jest równa $\oint_S \chi\mathbf{Gn}dS = 0$, gdyż składowa normalna wektora $\mathbf{G}$ na powierzchni S zeruje się. Zerowanie się prawej strony jako całki z funkcji nieujemnej oznacza, że $\mathbf{G}^2 = 0$, czyli $\mathbf{G} = 0$, a więc rozwiązania $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ są identyczne.

Twierdzenie to można przeformułować odsuwając powierzchnię S do nieskończoności; V jest wtedy całą przestrzenią trójwymiarową. Zamiast założenia o znikaniu składowej normalnej pola na powierzchni S trzeba założyć, że pole $\mathbf{F}$ zmierza w nieskończoności do zera wystarczająco szybko (wystarczy jak $\frac{1}{r^2}$).

1.2 Funkcja Greena

Zbadajmy wyrażenie

$$\nabla^2 \frac{1}{r}. \tag{4}$$

Wykonując różniczkowania otrzymuje się

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla(\nabla \frac{1}{r}) = \nabla \frac{-\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^3}\nabla\mathbf{r} - \mathbf{r}\frac{-3}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0. \tag{5}$$

W punkcie $\mathbf{r} = 0$ funkcja nie jest określona. Można jej nadać sens, badając jej zachowanie pod całką po całej przestrzeni i dopuszczają słuszność twierzdzenia Gaussa

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV = \oint_S \nabla \frac{1}{r} d\mathbf{S} = \oint_S \frac{-\mathbf{r}}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r} r^2 d\Omega = -4\pi = -4\pi \int_V \delta(\mathbf{r}) dV, \tag{6}$$

gdzie wprowadzono współrzędne sferyczne i wycałkowano po pełnym kącie bryłowym $\Omega = 4\pi$.

Badane wyrażenie ma więc własność delty Diraca

$$\nabla^2 \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{r} = \delta(\mathbf{r}), \tag{7}$$

albo ogólniej

$$\nabla^2_{\mathbf{r}} \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{8}$$

Funkcje spełniające równanie takie, że jakiś operator działając na taką funkcję daje deltę Diraca, nazywają się funkcjami Greena.

Przykładowo rozwiązanie równania Poissona

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \tag{9}$$

z danym źródłem g można napisać

$$f(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi}\int_V \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} g(\mathbf{r}') d^3r' + f_0(\mathbf{r}), \tag{10}$$

gdzie f_0 jest rozwiązaniem równania jednorodnego (Laplace'a) $\nabla^2 f_0 = 0$.

Sprawdźmy

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \nabla^2 \frac{-1}{4\pi}\int_V \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} g(\mathbf{r}') d^3r' = \int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') g(\mathbf{r}') d^3r' = g(\mathbf{r}). \tag{11}$$

Podobnie można napisać rozwiązanie równania dla funkcji wektorowej.

1.3 Rozkład pola wektorowego na części bezwirową i bezźródłową

Niech pole $\mathbf{F}$ spełnia równania

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r} &= \mathbf{A}(\mathbf{r}), \\ \nabla \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \alpha(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie źródła $\mathbf{A}$ i α znikają w nieskończoności. Pole $\mathbf{F}$ można rozłożyć na część bezwirową $\mathbf{F}_1$ i cząść bezźródłową, tzn. takie że

$$\begin{aligned} &\nabla \times \mathbf{F}_1 = 0, \ \ \nabla \mathbf{F}_1 = \alpha, \\ &\nabla \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{A}, \ \ \nabla \mathbf{F}_2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Pola $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ określone są jednoznacznie.

Pierwsze z równań można rozwiązać działając dywergencję obu stron drugiego z ró'wnań, czyli pisząc

$$\nabla(\nabla \mathbf{F}_1) = \nabla^2 \mathbf{F}_1 = \nabla \alpha \tag{14}$$

i rozwiązanie

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi}\int_V \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \alpha(\mathbf{r}') d^3r', \tag{15}$$

gdzie rozwiązanie równania jednorodnego pominięto, gdyż dla źródła $\alpha = 0$ pole $\mathbf{F}_1 = 0$.

Drugie z równań można rozwiązać biorąc rotację obu stron trzeciego z równań

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) \equiv \nabla(\nabla \mathbf{F}_2) - \nabla^2 \mathbf{F}_2 = -\nabla^2 \mathbf{F}_2 = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{16}$$

gdzie skorzystano z tożsamości dla podwójnego iloczynu wektorowego oraz z zerowania się dywergencji pola $\mathbf{F}_2$. Rozwiązanie daje się napisać jako

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')] d^3 r', \tag{17}$$

gdzie znów opuszczono rozwiązanie równania jednorodnego.

Pozostaje sprawdzić, czy rzeczywiście rotacja pola $\mathbf{F}_1$ i dywergencja pola $\mathbf{F}_2$ się zerują. Obliczmy

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \frac{-1}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \alpha(\mathbf{r}') d^3 r' = \frac{-1}{4\pi} \int_V [\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}] \times \nabla_{\mathbf{r}'} \alpha(\mathbf{r}') d^3 r' =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_V [\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}] \times \nabla_{\mathbf{r}'} \alpha(\mathbf{r}') d^3 r' = \tag{18}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \{\nabla_{\mathbf{r}'} \times [\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \alpha(\mathbf{r}')] - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \alpha(\mathbf{r}')\} d^3 r' =$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \alpha(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}' = 0, \tag{19}$$

gdzie kolejno zamieniono różniczkowanie funkcji $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ względem $\mathbf{r}$ na różniczkowanie względem $\mathbf{r}'$ (ze zmianą znaku), skorzystano z tożsamości $(\nabla f) \times \mathbf{a} = \nabla \times (f\mathbf{a}) - f \nabla \times \mathbf{a}$ dla dowolnego skalara f i dowolnego wektora $\mathbf{a}$, wykorzystano fakt, że rotacja gradientu pola skalarnego jest równa zero, zamieniono całkę objętościową na powierzchniową według relacji $\int_V \nabla \times \mathbf{a} dV = -\oint \mathbf{a} \times d\mathbf{S}$ oraz skorzystano z zerowania się źródła α i jego pochodnych na nieskończonej powierzchni.

Podobnie oblicza się dywergencję $\mathbf{F}_2$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')] d^3 r' = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')] d^3 r'$$

$$\frac{-1}{4\pi} \int_V [\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}][\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')] d^3 r' = \tag{20}$$

$$\frac{-1}{4\pi} \int_V \{\nabla_{\mathbf{r}'} [\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')] - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')\} d^3 r' =$$

$$\frac{-1}{4\pi} \oint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{S}' = 0, \tag{21}$$

gdzie skorzystano z tożsamości $(\nabla f)\mathbf{a} = \nabla(f\mathbf{a}) - f\nabla\mathbf{a}$, z zerowania się dywergencji z rotacji pola wektorowego, zamieniono całkę objętościową na powierzchniową oraz skorzystano z zerowania się źródła $\mathbf{A}$ i jego pochodnych na nieskończonej powierzchni.