Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.14

1 Mechanika ośrodków ciągłych 2

1.1 Teoria wirów

Rozważmy dwa punkty P_1 i P_2 i łączący je łuk C wewnątrz ośrodka. Łuk jest unoszony przez ośrodek. Prąd jest dany całką krzywoliniową

$$\int_C \mathbf{v} d\mathbf{r} \tag{1}$$

Pochodną śledczą prądu można obliczyć przechodząc do opisu Lagrange'a i z powrotem, przy czym załóżmy, że wzdłuż krzywej C zmienia się tylko jeden trzech parametrów, np a (w przedziale (a_1, a_2)). Można napisać

$$\begin{gathered}\frac{D}{Dt}\int_C \mathbf{v} d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{a_1}^{a_2} \mathbf{v}\frac{d\mathbf{r}}{da}da = \frac{\partial}{\partial t}\int_{a_1}^{a_2} \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}da = \int_{a_1}^{a_2}[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} + \mathbf{v}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial a \partial t}]da = \\ \int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}da + \int_{a_1}^{a_2}\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a}da = \int_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt}d\mathbf{r} + \int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 da = \\ \int_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt}d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{P_2} - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{P_1}.\end{gathered} \tag{2}$$

Jeśli ośrodek jest idealny, siły objętościowe - zachowawcze i spełnione jest równanie fizyczne, to można skorzystać z równania Eulera w postaci

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla(\Omega + P) \tag{3}$$

i napisać

$$\frac{D}{Dt}\int_C \mathbf{v} d\mathbf{r} = -\int_C \nabla(\Omega + P)d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{P_2} - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{P_1} = (\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \Omega - P)^{P_2}_{P_1}. \tag{4}$$

Udowodniony wniosek nosi nazwę I twierdzenia lorda Kelvina: pochodna śledcza prądu po łuku unoszonym przez ośrodek, przy zachowawczych siłach objętościowych i obowiązującym równaniu fizycznym, zależy tylko od punktów końcowych łuku.

Prąd po krzywej zamkniętej nosi nazwę krążenia (cyrkulacji). W tym przypadku otrzymuje się II twierdzenie lorda Kelvina

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt}d\mathbf{r}, \tag{5}$$

a przy założeniach o idealności ośrodka, potencjalności sił objętościowych i obowiązywaniu równania fizycznego

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \oint_C \nabla(-\Omega - P)d\mathbf{r} = -\int_S \nabla\times\nabla(\Omega + P)d\mathbf{S} = 0. \tag{6}$$

Wnioskiem z powyższego jest twierdzenie Lagrange'a: Przy tych założeniach, jeśli krążenie po jakimś obwodzie było równa zero w pewnej chwili, to takim pozostanie.

Jeśli krążenie po wszystkich krzywych zamkniętych C znika w obszarze jednospójnym, to

$$\int_S \nabla\times\mathbf{v}d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = 0, \tag{7}$$

gdzie S jest dowolną powierzchnią rozpiętą na krzywej C, to $\nabla\times\mathbf{v} = 0$ i ruch jest potencjalny.

1.2 Twierdzenie Helmholtza

Linia wirowa jest to linia styczna w każdym punkcie do wektora wiru $\vec{\omega} = \nabla\times\mathbf{v}$. Jej równanie można napisać jako

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\mu} = \lambda\vec{\omega}, \tag{8}$$

gdzie μ jest parametrem. Linie wirowe przechodzące przez krzywą zamkniętą tworzą rurkę wirową, a rurka ta ogranicza strugę wirową.

Natężenie strugi wirowej jest krążeniem pola prędkości wzdłuż krzywej leżącej na powierzchni bocznej strugi

$$R = \oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_S \nabla\times\mathbf{v}d\mathbf{S} = \int_S \vec{\omega}d\mathbf{S}. \tag{9}$$

I twierdzenie Helmholtza mówi, że natężenie strugi wirowej jest jednakowe wzdłuż strugi, tzn. nie zależy od wyboru krzywej C.

Dla dowodu rozważmy dwie krzywe zamknięte C_1 i C_2 opasujące strugę i krzywą C_3 łączącą jakiś punkt na C_1 z jakimś punktem na C_2. Weźmy krzywą zamkniętą składającą się z C_1, C_3, $-C_2$ i $-C_3$ (minus oznacza przeciwną orientację krzywej).

Całka

$$\oint_{C_1+C_3-C_2-C_3} \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{v}d\mathbf{S} = 0, \tag{10}$$

ponieważ S jest powierzchnią boczną strugi wirowej, tzn. wektor $\vec{\omega} = \nabla\mathbf{v}$ jest do niej styczny, a kierunek wektora $d\mathbf{S}$ jest do niej normalny. Wkłady od C_3 i $-C_3$ się znoszą. Stąd

$$\oint_{C_1} \mathbf{v}d\mathbf{r} = \oint_{C_2} \mathbf{v}d\mathbf{r}. \tag{11}$$

Jeśli krzywe C_1 i C_2 się przecinają, to można znaleźć inną krzywą C_4 nie przecinającą się z żadną z nich i krążenia po C_1 i po C_2 są równe krążeniu po C_4, a więc są równe sobie.

Twierdzenie to nie wymaga specjalnych założeń dotyczących ośrodka i obowiązuje nawet dla ośrodków nieidealnych.

II twierdzenie Helmholtza dotyczy ośrodków idealnych, z potencjalnymi siłami objętościowymi i z obowiązującym równaniem fizycznym $\rho = \rho(p)$. Mówi ono, że natężenie strugi wirowej nie zmienia się podczas przemieszczania się krzywej wraz z ośrodkiem.

Dowód wynika z twierdzenia Kelvina, gdyż przy założeniach o potencjalności sił objętościowych i o obowiązywaniu równania fizycznego

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = 0. \tag{12}$$

1.3 Równanie Helmholtza

Równanie Helmholtza jest równaniem różniczkowym dla pola wirów.

Punktem wyjścia jest równanie Eulera, w którym użyto wyprowadzonej wcześniej tożsamości

$$\frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}. \tag{13}$$

Równanie Eulera przyjmuje postać

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{14}$$

Biorąc rotację obu stron otrzymuje się

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{F} - \nabla \times \frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{15}$$

gdyż $\nabla \times \nabla \mathbf{v}^2 = 0$.

Podwójny iloczyn wektorowy można rozpisać (wyraz podkreślony jest traktowany jako stała przy różniczkowaniu)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{\omega} \times \mathbf{v}) = \nabla \times (\underline{\vec{\omega}} \times \mathbf{v}) + \nabla \times (\vec{\omega} \times \underline{\mathbf{v}}) = \\ \vec{\omega}\nabla \mathbf{v} - (\vec{\omega}\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla\vec{\omega} + (\mathbf{v}\nabla)\vec{\omega}, \end{aligned} \tag{16}$$

przy czym $\nabla\vec{\omega} = 0$ (jako dywergencja rotacji). Badane równanie sprowadza się do postaci

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\vec{\omega} + \vec{\omega}\nabla\mathbf{v} - (\vec{\omega}\nabla)\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{F} - \nabla \times \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{17}$$

Jeśli siły objętościowe są potencjalne i obowiązuje równanie fizyczne, prawa strona ostatniego równania znika, gdyż

$$\nabla \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla \Omega = 0, \tag{18}$$

$$\nabla \times \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla \times \nabla P = 0. \tag{19}$$

Wprowadzając pochodną śledczą otrzymujemy równanie Helmholtza

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \vec{\omega}\nabla\mathbf{v} - (\vec{\omega}\nabla)\mathbf{v} = 0. \tag{20}$$

Korzystając z równania ciągłości

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\mathbf{v} = 0 \tag{21}$$

można napisać równanie Helmholtza jako

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \vec{\omega}\frac{-1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} - (\vec{\omega}\nabla)\mathbf{v} = 0 \tag{22}$$

lub

$$\frac{D}{Dt}\frac{\vec{\omega}}{\rho} = (\frac{\vec{\omega}}{\rho}\nabla)\mathbf{v}. \tag{23}$$

1.4 Linia wirowa przemieszcza się razem z cząstkami ośrodka

Równanie linii wirowej $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mu)$ ma postać

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\mu} = \lambda\vec{\omega}, \tag{24}$$

gdzie μ jest parametrem, a λ współczynnikiem proporcjonalności.

Niech dwie cząstki o położeniach $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ leżą na linii wirowej. Wtedy $d\mathbf{r} = \vec{\omega}\lambda d\mu$. Wprowadźmy pomocnicze oznaczenie $\lambda d\mu = \frac{\epsilon}{\rho}$, czyli

$$d\mathbf{r} = \frac{\epsilon}{\rho}\vec{\omega}. \tag{25}$$

Po czasie dt cząstki znajdą się w położeniach

$$\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r})dt \quad i \quad \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r})dt. \tag{26}$$

Wektor łączący cząstki ma więc postać

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + [\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r})dt - \mathbf{v}(\mathbf{r})dt] = d\mathbf{r} + (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}dt. \tag{27}$$

Zachodzi więc

$$d\mathbf{r}' = \frac{\epsilon}{\rho}\vec{\omega} + dt(\frac{\epsilon}{\rho}\vec{\omega}\nabla)\mathbf{v} \tag{28}$$

Po skorzystaniu z równania Helmholtza otrzymuje się

$$d\mathbf{r}' = \epsilon[\frac{\vec{\omega}}{\rho} + dt\frac{D}{Dt}\frac{\vec{\omega}}{\rho}]. \tag{29}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest funkcją $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$ w chwili $t + dt$ i można je oznaczyć jako $\frac{\vec{\omega}'}{\rho'}$. zachodzi więc

$$d\mathbf{r}' = \epsilon\frac{\vec{\omega}'}{\rho'} = \vec{\omega}'\lambda' d\mu, \tag{30}$$

gdzie stałą proporcjonalności oznaczono jako $\frac{\epsilon}{\rho'} = \lambda' d\mu$.

Wektor $d\mathbf{r}'$ określający względne położenie rozważanych cząstek leży zatem na tej samej linii wirowej.

1.5 Powstawanie wirów

Aby powstał wir, musi zostać uchylone przynajmniej jedno z założeń: albo nie obowiązuje równanie fizyczne w założonej wyżej postaci albo istnieją siły objętościowe niepotencjalne.

Równania dla krążenia prędkości można napisać uogólniając równanie (6)

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \oint_C \frac{D}{Dt}\mathbf{v}d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r} - \oint_C \frac{1}{\rho}\nabla p d\mathbf{r}, \tag{31}$$

gdzie wprowadzenie pochodnej śledczej pod całkę uzasadniono wyżej i skorzystano w równania Eulera.

W pierwszym przypadku pozostaje

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \oint_C \frac{D}{Dt}\mathbf{v}d\mathbf{r} = -\oint_C \frac{1}{\rho}\nabla p d\mathbf{r} \equiv -\oint_C \frac{dp}{\rho} = -\oint_C \nu dp, \tag{32}$$

gdzie wprowadzono objętość właściwą $\nu = \frac{1}{\rho}$. Całkę $\oint_c \nu dp$ wygodnie jest scharakteryzować, rozważając powierzchnie izobaryczne $p = const$ i izosteryczne $\nu = const$. W przypadku, gdy obowiązywałoby równanie fizyczne, powierzchnie te pokrywałyby się; w ogólnym przypadku przecinają się. Dwie powierzchnie izobaryczne odpowiadające ciśnieniom różniącym się o jednostkę α i dwie powierzchnie izosteryczne różniące się o jedostkę β wyznaczają rurkę izobaryczno-izosteryczną (prostokątną).

Rozważmy krzywą na powierzchni rurki; jej orientację przyjmijmy, tak aby była zgodna z kierunkiem kąta wypukłego między ∇p i $\nabla \nu$. Całka po dodatnim obwodzie składa się jest sumą całek po czterach odcinkach o stałych p lub ν. Odcinki o stałych p nie dają wkładu do całki, bo $dp = 0$. Na jednym z odcinków $\nu = \nu_0\beta$, a $\int dp = \alpha$, na drugim $\nu = \nu_0\beta + \beta$, a $\int dp = -\alpha$. Całka po zamkniętej krzywej wynosi więc $-\alpha\beta$. Zmiana orientacji krzywej powoduje zmianę znaku.

Całka obejmująca N_+ krzywych o orientacji dodatniej i N_- krzywych o orientacji ujemnej ma wartość $-(N_+ - N_-)\alpha\beta$. Jeśli krzywa przebiega między rurkami o niecałkowitych wielokrotnościach α i β, to liczby $N_\pm$ nie są całkowite.

Można napisać ostatecznie

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \alpha\beta(N_+ - N_-). \tag{33}$$

Ostatni wynik nazywa się twierdzeniem Bjerknesa: pochodna śledcza krążenia prędkości po obwodzie unoszonym przez ośrodek jest równa różnicy liczby rurek dodatnich i ujemnych jednostkowych rurek izobaryczno-izosterycznych (w jednostkach $\alpha\beta$).

Przykładem wiru tak wytworzonego jest ruch powietrza na granicy lądu o morza (bryza). Rano ląd nagrzewa się szybciej i powietrze nad lądem ma mniejszą gęstość, czyli większą objętość właściwą. O ile izobary są w dobrym przybliżeniu poziome, o tyle izostery przy przejści z lądu na morze wyginają się ku górze. Wektor ∇p skierowany jest pionowo w dół, wektor $\nabla\nu$ - w górę w kierunku lądu. Dodatnia orientacja krzywej to od morza do lądu na małej wysokości i od lądu do morza na dużej wysokości i tak wieje wiatr.

Na podobnej zasadzie powstają wiry w morzu w wyniku różnic w zasoleniu; izobary są poziome, a izostery - ukośne.

Przykładem wirów powodowanych przez siły niepotencjalne są cyrkulacje powietrza powstające w wyniku siły Coriolisa. Zachodzi $\mathbf{F} = 2\vec{\omega}_Z \times \mathbf{v}$, gdzie $\vec{\omega}_Z$ jest prędkością kątową ruchu wirowego Ziemi, i w konsekwencji

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \oint_C \frac{D}{Dt}\mathbf{v}d\mathbf{r} = -\oint_C 2\vec{\omega_Z} \times \mathbf{v}d\mathbf{r}. \tag{34}$$

Weźmy przykład: niech na półkuli północnej wiatr wieje na północ. Niech w naszym układzie wektor $\vec{\omega_Z}$ skierowany będzie w górę. Wektor $\mathbf{v}$ skierowany jest stycznie do powierzchni Ziemi ku północy w górę. Wektor $-\vec{\omega} \times \mathbf{v}$ skierowany jest za płaszczyznę rysunku. Jeśli skierujemy wektor $d\mathbf{r}$ za płaszczyznę rysunku, wkład $-2\vec{\omega} \times \mathbf{v}$ do całki będzie dodatni. Tworzy się zatem wir obracający masy powietrza w prawo.

2 Uogólnienie dla ośrodków nieidealnych

W ośrodkach nieidealnych występują także siły powierzchniowe styczne do powierzchni. By je uwzględnić, napiszmy najpierw równanie Eulera dla składowej j prędkości

$$\rho\frac{Dv_j}{Dt} = \rho F_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} \equiv \rho F_j + \frac{\partial}{\partial x_k}(-p\delta_{jk}), \tag{35}$$

gdzie sztucznie wprowadzono sumowanie po podwójnie powtarzającym się wskaźniku k. Dla ośrodków idealnych uogólnienie polega na dodaniu do diagonalnego tensora $-p\delta_{jk}$ tensora σ'_{jk}

$$\rho\frac{Dv_j}{Dt} = \rho F_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} \equiv \rho F_j + \frac{\partial}{\partial x_k}(-p\delta_{jk} + \sigma'_{jk}), \tag{36}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$). Składowa j siły powierzchniowej działająca na element o objętości V wynosi

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k}(-p\delta_{jk} + \sigma'_{jk})dV = \oint_S (-p\delta_{jk} + \sigma'_{jk})dS_k \tag{37}$$

Sens tensora σ'_{jk} jest więc taki, że jest to składowa j siły stycznej działającej na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku k.

Tensor σ' musi być związany z prędkością; dla niewielkich prędkości powinien od niej zależeć liniowo. Jeśli prędkość wszystkich warstw ośrodka byłaby stała, nie ma efektu lepkości. Siły te powinny więc zależeć od pochodnych prędkości, w najprostszym przypadku od pierwszych pochodnych $\frac{\partial v_j}{\partial x_k}$.

Dodatkowo efekt lepkości nie powinien wystąpić prz obrocie ośrodka jako całości, tzn. gdy prędkość w punkcie $\mathbf{r}$ ma postać $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$, gdzie $\vec{\omega}$ jest stały. To narzuca warunek na tensor σ', który najwygodniej otrzymać pisząc iloczyn wektorowy jako

$$(\vec{\omega} \times \mathbf{r})_j = \epsilon_{jis}\omega_i x_s, \tag{38}$$

gdzie tensor ϵ jest zdefiniowany tak, że $\epsilon_{123} = 1$ oraz $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$; gdy jakiś indeks się powtarza, element tensora jest równy zero. Pochodna $\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\epsilon_{jis}\omega_i x_s = \epsilon_{jik}\omega_i$. Wyraz równy zero można otrzymać na dwa sposoby:

1. jako $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \epsilon_{kik}\omega_i = 0$,
2. jako $\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = (\epsilon_{kij} + \epsilon_{jik})\omega_i = 0$;

z takich wyrazów należy skonstruować tensor σ', który zapisuje się zwykle jako

$$\sigma'_{jk} = \eta(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_s}{\partial x_s}\delta_{jk}) + \xi\delta_{jk}\frac{\partial v_s}{\partial x_s}. \tag{39}$$

Równanie ruchu, znane jako równanie Naviera-Stokesa, przybiera więc postać

$$\rho\frac{Dv_j}{Dt} = \rho F_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k}[\eta(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_s}{\partial x_s}\delta_{jk}) + \xi\delta_{jk}\frac{\partial v_s}{\partial x_s}], \tag{40}$$

lub w zapisie wektorowym

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{\partial t} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\frac{1}{3}\eta + \xi)\nabla(\nabla \mathbf{v}). \tag{41}$$

Współczynniki η i ξ są wspólczynnikami lepkości. Dla cieczy nieściśliwej $\nabla \mathbf{v} = 0$ i wystarczy jeden współczynnik η.

3 Ruch falowy

3.1 Równanie falowe

Równaniem falowym dla pola skalarnego $f(\mathbf{r}, t)$ nazywamy równanie

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \tag{42}$$

gdzie c jest stałą mającą sens prędkości. Dla pola wektorowego równanie jest analogiczne.

Równaniem falowym w szerszym tego słowa znaczeniu jest każde równanie zawierające pochodne względem zmiennych przestrzennych i czasowych.

3.2 Ruch w jednym wymiarze

Rozważmy najpierw fale $f(z, t)$w jednym wymiarze opisane równaniem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{43}$$

Podstawiając nowe zmienne

$$\begin{aligned}
\xi &= z - ct, \\
\eta &= z + ct, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial}{\partial t} &= -c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta},
\end{aligned} \tag{44}$$

otrzymujemy równanie dla funkcji $g(\xi, \eta) \equiv f(z(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \eta} = 0. \tag{45}$$

Z ostatniego równania wynika, że $\frac{\partial g}{\partial \eta} = b(\eta)$, czyli nie zależy od ξ. Z kolei $g = \int b(\eta) d\eta + A(\xi) \equiv B(\eta) + A(\xi)$, gdyż stała całkowania po η w ogólności zależy od ξ. Ostatecznie otrzymuje się rozwiązanie postaci

$$f(z, t) = A(z - ct) + B(z + ct), \tag{46}$$

Gdzie A i B są na razie dowolnymi funkcjami. Reprezentują one zaburzenie rozchodzące się w przestrzeni z prędkością c odpowiednio w prawo i w lewo.

Jeśli określić warunki początkowe

$$\begin{aligned} &f(z, 0) = \lambda(z), \\ &\frac{\partial f}{\partial t}|_{t=0} = \mu(z), \end{aligned} \tag{47}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} &A(z) + B(z) = \lambda(z), \\ &-cA'(z) + cB'(z) = \mu(z) \end{aligned} \tag{48}$$

a więc

$$-A(z) + B(z) = \frac{1}{c}\int_{z_0}^{z} \mu(z) dz. \tag{49}$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{2}\lambda(z) - \frac{1}{2c}\int_{z_0}^{z} \mu(z) dz, \\ B(z) &= \frac{1}{2}\lambda(z) + \frac{1}{2c}\int_{z_0}^{z} \mu(z) dz, \end{aligned} \tag{50}$$

a rozwiązanie równania falowego ma postać

$$f(z, t) = \frac{1}{2}[\lambda(z - ct) + \lambda(z + ct)] + \frac{1}{2c}\int_{z-ct}^{z+ct} \mu(z) dz. \tag{51}$$

3.3 Przypadek trójwymiarowy

Uogólnienie dla przypadku trójwymiarowego dla fali rozchodzącej się w kierunku danym wektorem jednostkowym $\mathbf{n}$, ma postać

$$f(\mathbf{r},t) = A(n_x x + n_y y + n_z z - ct) = A(\mathbf{nr} - ct). \tag{52}$$

Jest to fala płaska rozchodząca się w kierunku $\mathbf{n}$. Wartość funkcji f w płaszczyźnie prostopadłej do $\mathbf{n}$ nie zależy od położnia punktu na tej płaszczyźnie.

3.4 Fale płaskie monochromatyczne

Ważnym przykładem są fale płaskie postaci

$$f(\mathbf{r},t) = M\cos(k(\mathbf{nr} - ct) + \alpha) \equiv M\cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha), \tag{53}$$

gdzie M jest amplitudą, $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ jest wektorem falowym, a $\omega = ck$ jest częstością kołową.

3.5 Fale kuliste

Innym przykładem jest fala kulista postaci $f(r,t)$, gdzie $r = |\mathbf{r}|$. Laplasjan we współrzędnych kulistych ma postać

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}]. \tag{54}$$

W przypadku fali kulistej na funkcję działa tylko radialna część laplasjanu. Podstawienie $f(r,t) = \frac{F(r,t)}{r}$ prowadzi do równania

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \tag{55}$$

Rozwiązania dla funkcji F są analogiczne do rozwiązań w jednym wymiarze (poza tym, że zmienna r zmienia się z zakresie $[0,\infty)$), a całe rozwiązanie ma postać

$$f(r,t) = \frac{A(r-ct)}{r} + \frac{B(r+ct)}{r}, \tag{56}$$

gdzie poszczególne ceąści opisują falę rozchodzącą się od środka i falę schodzącą się ku środkowi.

Ważnym przkładem jest rozchodząca się fala kulista monochromatyczna, zapisana w postaci zespolonej jako

$$f(r,t) = M\frac{\exp[ik(r-ct)]}{r} \equiv M\frac{\exp[i(kr-\omega t)]}{r}, \tag{57}$$

gdzie znowu $\omega = kc$.

3.6 Fale w ośrodkach ciągłych

W zależności od konkretnej sytuacji fale w ośrodkach opisuje się różnymi typami równań falowych, w tym równaniami nieliniowymi lub rzędu wyższego niż drugi. Tu rozważymy fale akustyczne przy założeniach prowadzących do rozważanego wyżej równania falowego.

Zakładamy, że nie ma sił objętościowych, a prędkość cząstek ośrodka jest mała (nie mylić z prędkością rozchodzenia się fali). To ostatnie założenie oznacza, że kwadratowy w prędkościach wyraz $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ stanowiący różnicę między pochodną śledczą a cząstkową jest do pominięcia. Obowiązuje więc równanie Eulera w uproszczonej postaci, równanie ciągłości oraz równanie fizyczne

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{58}$$

$$\rho = \rho(p). \tag{59}$$

Miarą małości są $\mathbf{v}$, ∇p. Zastąpienie ρ przez wartość początkową ρ_0 powoduje pojawienie się różnic drugiego rzędu, tu pomijanych. Stąd ostatni układ równań można napisać jako

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\nabla\mathbf{v} = 0, \tag{60}$$

$$\rho = \rho(p). \tag{61}$$

Korzystając z równania fizycznego można napisać

$$\nabla p = \frac{dp}{d\rho}\nabla\rho \approx (\frac{dp}{d\rho})_0\nabla\rho \equiv c^2\nabla\rho, \tag{62}$$

gdzie pochodną ciśnienia względem gęstości oznaczono jako c^2.

Układ równań przybiera postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} c^2 \nabla \rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &+ \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0, \end{aligned} \tag{63}$$

Działają operatorem ∇ na pierwsze równanie, różniczkując drugie rówanie względem czasu, wyliczając $\frac{\partial}{\partial t}\nabla \mathbf{v}$ z pierwszego równania i podstawiając do drugiego otrzymujemy równanie falowe dla gęstości

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 \rho = 0. \tag{64}$$

Ponieważ pochodne ciśnienia i gęstości są w przybliżeniu proporcjonalne

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &\approx (\frac{dp}{d\rho})|_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \approx (\frac{dp}{d\rho})|_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \\ \nabla p &\approx (\frac{dp}{d\rho})|_0 \nabla \rho, \quad \nabla^2 p \approx (\frac{dp}{d\rho})|_0 \nabla^2 \rho, \end{aligned} \tag{65}$$

takie samo równanie falowe obowiązuje dla ciśnienia p.

Z równań (63) można też dostać równanie falowe dla prędkości. Należy pierwsze z równań zróżniczkować po czasie, a na drugie podziałać operatorem ∇ otrzymując

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho_0} c^2 \nabla \frac{\partial}{\partial t} \rho, \\ \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} &+ \rho_0 \nabla (\nabla \mathbf{v}) = 0, \end{aligned} \tag{66}$$

Po wyeliminowaniu wyrazów z ρ otrzymuje się

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \mathbf{v}) = 0. \tag{67}$$

Należy skorzystać z tożsamości

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}. \tag{68}$$

Przy założeniu, że pole prędkości jest bezwirowe, tzn. $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, prawdziwe jest równanie falowe także dla prędkości

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{v} = 0. \tag{69}$$

Można łatwo obliczyć prędkość rozchodzenia się dźwięku w gazie. Równanie fizyczne powinno opisywać przemianę adiabatyczną gazu o równaniu $pV^\kappa = const.$, albo $\frac{p}{\rho^\kappa} = const.$, czyli $p = const \rho^\kappa$. Stąd

$$c = \sqrt{(\frac{\partial p}{\partial \rho})|_0} = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}. \tag{70}$$