Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.13

1 Mechanika ośrodków ciągłych 1

1.1 Równania ruchu Eulera

1.1.1 Uwagi ogólne

Ośrodek ciągły jest kolejnym modelem stosowanym w mechanice. Pojęcie to odnosi się do materii wypełniającej całą przestrzeń (lub jej część) w sposób ciągły. Możemy mieć do czynienia z płynem (cieczą lub gazem) lub ciałe stałym (ale nie sztywnym). Model nie uwzględnia struktury ziarnistej na poziomie atomowym, gdzie występuje koncentracja materii w obszarze jąder atomowych i pustka w obszarze międzyatomowym. Ośrodki ciągłe charakteryzowane są funkcjami, które są w zasadzie ciągłe, czyli przy zmniejszaniu rozmiarów rozważanej części ośrodka są wolnozmienne jako funkcje położenia i czasu. .

Jedną z takich funkcji jest gęstość $\rho(\mathbf{r}, t)$. Rozważmy element (grudkę) ośrodka o masie Δm i objętości ΔV zawieszoną w punkcie $\mathbf{r}$. Zmierzajmy z objętością ΔV do zera, tak aby wszystkie jej wymiary zmierzały do zera. Wtedy

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{dV} = lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{1}$$

Dla ośrodka ziarnistego funkcja ta przyjmowałaby ogromne wartości w obszarze jądra atomowego i zero w obszarze międzyatomowym.

Dynamika elementów ośrodka jest newtonowska. Siły można podzielić na objętościowe i powierzchniowe.

Siły objętościowe działające na mały element ośrodka są proporcjonalne do objętości, a więc do masy tego elementu. Siła $\mathbf{F}$ będzie brana na jednostkę masy, a więc będzie miała wymiar przyspieszenia. "Prawdziwa" siła będzie postaci

$$\mathbf{F} dm = \mathbf{F} \rho dV. \tag{2}$$

Typową siłą objętościową jest siła grawitacji; wtedy $\mathbf{F}$ jest tożsame z przyspieszeniem ziemskim.

Siły powierzchniowe działają przez powierzchnię (fizyczną lub pomyślaną) ośrodka. Mają wartość proporcjonalną do powierzchni. Siłę powierzchniową można rozłożyć na składową normalną do powierzchni i składową styczną. Składowa styczna związana jest z lepkością ośrodka i powodowana tarciem jednej warstwy o drugą, poruszającą się z inną prędkością. W ośrodkach idealnych występuje tylko składowa normalna i ten przypadek będzie tematem kilku następnych rozdziałów.

Jeśli interesuje nas element ośrodka ograniczony powierzchnią dS, to jednostkowy wektor normalny $\mathbf{n}$ skierowany jest na zewnątrz tego elementu, a siła działająca na element z zewnątrz wynosi $-p\mathbf{n}dS \equiv -pd\mathbf{S}$, gdzie p jest ciśnieniem, czyli wartością siły na jednostkę powierzchni.

Parcie - całkowita siła powierzchniowa działająca na element ośrodka o objętości V jest równa

$$\mathbf{F}_{pow} = -\oint_S p\, d\mathbf{S} = -\int_V \nabla p\ dV, \tag{3}$$

1.1.2 Prawo Pascala

Rozpatrzmy mały element ośrodka, przy czym ciśnienie jest stałe. Równanie ruchu, o którym będzie mowa niżej, zawiera iloczyn masy i przyspieszenia (proporcjonalne do trzeciej potęgi rozmiarów liniowych), siłę objętościową (także proporcjonalną do trzeciej potęgi rozmiarów liniowych) oraz siłę powierzchniową (proporcjonalną do drugiej potęgi rozmiarów liniowych). Ta ostatnia dominuje i powinna być równa zero.

Niech rozważany element ma kształt ostrosłupa, którego krawędzie boczne są osiami układu odniesienia. Niech ciśnienie działające na ściankę leżą w płaszczyźnie (yz) i mającą powierzchnię σ_x wynosi p_x, a ciśnienie działające na podstawę ostrosłupa o powierzchni σ wynosi p. Składowa x siły wypadkowej wynosi

$$p_x\sigma_x - p\sigma\cos\alpha = 0, \tag{4}$$

gdzie α jest kątem między normalną do powierzchni σ a osią x. Ale $\sigma\cos\alpha = \sigma_x$, skąd wynika $p_x = p$.

Ostatni wniosek nosi nazwę prawa Pascala: ciśnienie w każdym punkcie ośrodka idealnego jest niezależne od kierunku.

Wniosek ten jest zgodny z powyższym wzorem na parcie. Jeśli ciśnienie p jako stałe wyłączyć przed całkę, można napisać

$$\mathbf{F}_{pow} = -\oint p\, d\mathbf{S} = -p \oint d\mathbf{S} = 0. \tag{5}$$

1.1.3 Pochodna śledcza

W metodzie Eulera zmiennymi niezależnymi są położenie $\mathbf{r}$ i czas t. Pochodna $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ dowolnej wielkości fizycznej $\alpha(\mathbf{r}, t)$ zdaje sprawę z tego, jak zmienia się jej wartość w ustalonym punkcie przestrzeni. Formułując prawa ruchu, trzeba określić jak zmienia się wielkość fizyczna elementu ośrodka podróżującego w czasie z prędkością v

$$\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, t + dt) - \alpha(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}dt\nabla\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial t}dt \equiv \frac{D\alpha}{Dt}dt, \tag{6}$$

gdzie wprowadzono operację pochodnej śledczej

$$\frac{D}{Dt} \equiv \mathbf{v}\nabla + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{7}$$

1.1.4 Równania ruchu

Rozważmy element ośrodka o objętości ΔV i masie $\Delta m = \rho\Delta V$. Siła powierzchniowa działająca na ten element wynosi $-\oint p d\mathbf{S} = -\int_{\Delta V} \nabla p dV = -\nabla p \Delta V$, ponieważ element ΔV jest w granicy nieskończenie mały. Przyspieszenie tego elementu wynosi

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \tag{8}$$

a równanie Newtona ma postać

$$\frac{D}{Dt}\Delta m\mathbf{v} = d = \Delta m\mathbf{F} - \nabla p \Delta V. \tag{9}$$

Element masy $\Delta m = \rho\Delta V$ nie zmienia się w trakcie ewolucji (choć ρ i ΔV mogą się zmieniać). Dlatego Δm można wyjąć przed pochodną śledczą i napisać równanie ruchu jako

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{10}$$

Równanie to jest znane jako równanie Eulera.

1.1.5 Równanie ciągłości

Równanie ciągłości jest wyrazem zachowania masy elementu ośrodka. Niech $\mathbf{j}$ jest gęstością prądu, czyli masą przepływającą przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu. Masa która przepłynie przez powierzchnię dS prostopdłą do prędkości w czasie dt wynosi $\rho dV = \rho dSvdt$, a więc $j = \rho v$, a po uwzględnieniu kierunku $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Dla ustalonej, niezależnej od czasu objętości V zmiana masy zawartej w tej objętości w jednostce czasu jest równa masie wypływającej w jednostce czasu przez powierzchnię zamykającą objętość

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \mathbf{j}d\mathbf{S} = -\int_V \nabla\mathbf{j}dV = -\int_V \nabla(\rho\mathbf{v})dV. \tag{11}$$

Ponieważ objętość nie zależy od czasu, można pochodną po czasie wprowadzić pod całkę i otrzymać

$$\int_V [\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v})]dV = 0. \tag{12}$$

Z dowolności objętości V wynika równanie znane jako równanie ciągłości

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{13}$$

Równanie to można zapisać inaczej jako

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\rho + \rho\nabla\mathbf{v} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\mathbf{v} = 0. \tag{14}$$

Warunki brzegowe, jakie należy narzucić rozwiązaniom, muszą, najogólniej mówiąc, uwzględniać fakt, że składowa normalna prędkości do powierzchni ograniczjącej ośrodek jest równa zero.

1.1.6 Równanie fizyczne

Równanie fizyczne jest związane z budową ośrodka, wiążąc ciśnienie i gęstość

$$\rho = \rho(p). \tag{15}$$

Jest to założenie zawężające, bo w ogólnym przypadku gęstość może zależeć od innych zmiennych jak temperatura, zasolenie, wilgotność, ... Jeśli równanie fizyczne w powyższej postaci obowiązuje, to razem z równaniami

Eulera, i równaniem ciągłości stanowi komplet 5 równań z 5 niewiadomymi (v_x, v_y, v_z, ρ, p).

Jeśli dla $p \to 0$ zachodzi $\rho \to 0$, mamy do czynienie z gazem. Jeśli ρ zmierza do stałej różnej od zera, jest to ciecz.

W najprostszym przypadku gęstość może być niezależna od miejsca i czasu, tzn. $\rho = const$. Może się też zdarzyć, że gęstość podróżującego elementu ośrodka się nie zmienia, tzn. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, choć $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$; wtedy $\nabla\mathbf{v} = 0$. W obu przypadkach mówimy o ośrodku nieściśliwym.

Dla ośrodków mało ściśliwych dobre jest przybliżenie liniowe

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha p), \tag{16}$$

gdzie α jest stałą. Dla gazu w przemianie izotermicznej

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}, \tag{17}$$

a w przemianie adiabatycznej

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}, \ \ czyli\ \ \rho = \rho_0 (\frac{p}{p_0})^{\frac{1}{\kappa}}, \tag{18}$$

gdzie κ jest stosunkiem ciepła właściwego pod stałym ciśnieniem do ciepła właściwego w stałej objętości.

1.2 Metoda Lagrange'a

1.2.1 Równania ruchu

W metodzie Lagrange'a opisu ośrodka ciągłego, zamiast przyjmować zmienne $\mathbf{r} = (x, y, z)$ jako zmienne niezależne, przyjmuje się, że są nimi pewne parametry (a, b, c); mogą być nimi położenia początkowe, ale nie jest to konieczny wybór. W tym ostatnim przypadku $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$ oznacza położenie w chwili t cząstki ośrodka, która w chwili początkowej była w położeniu danym parametrami (a, b, c). Przypomina to mechanikę układów punktów materialnych.

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t). \end{aligned} \tag{19}$$

Zakłada się. że ten układ funkcji jest ciągły i odwracalny, czyli dwie cząstki nie mogą zajmować tego samego miejsca. Materia jest nieprznikalna. Zjawisko dyfuzji nie będzie tu odpowiednio uwzględnione. Podobnie prędkość, ciśnienie, gęstość są funkcjami tych zmiennych.

Równanie ruchu da się otrzymać z równania Eulera. Po pierwsze zamiast pochodnej śledczej wystąpi pochodna cząstkowa. Po drugie, gradient p, wyrażony przez pochodne względem (x, y, z) musi zostać jakoś zastąpiony przez pochodne względem (a, b, c).

Jeśi równania Eulera pomnoiżymy przez $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}$ otrzymamy

$$(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{F})\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}, \tag{20}$$

ponieważ $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ można napisać równania ruchu jako

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - \mathbf{F})\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0,\\
(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - \mathbf{F})\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0,\\
(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - \mathbf{F})\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

1.2.2 Równanie ciągłości

Zachowanie masy w podejściu Lagrange'a można opisać następująco. Weźmy "podróżujący" element masy ośrodka $dm = \rho dV = \rho dxdydz$. Element dm nie zależy od czasu. Element objętości przy zamianie zmiennych, zgodnie z twierdzeniem o zamianie zmiennych w całce wielokrotnej, wyraża się przez jakobian transformacji

$$dxdydz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} dadbdc \tag{22}$$

Stąd

$$\frac{dm}{dadbdc} = \rho\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = const. \tag{23}$$

Jeśli w szczególności (a, b, c) są kartezjańskimi współrzędnymi (x_0, y_0, z_0) w chwili t_0, to jakobian w chwili początkowej jest równy 1 i

$$\rho\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \rho_0\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)} = \rho_0. \tag{24}$$

Równanie ciągłości w tej postaci można wyprowadzić z równania ciągłości w obrazie Eulera, stosując twierdzenia o iloczynie jakobianów oraz różniczkowaniu wyznacznika.

1.3 Bilans energii i pędu

Pomnóżmy równanie Eulera skalarnie przez prędkość $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{vF} - \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\nabla p. \tag{25}$$

Poszczególne wyrazy można przekształcić:

1. $\mathbf{v}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\frac{\mathbf{v}^2}{2}$. Reguły wykonywania pochodnej śledczej są tu takie same, jak dla zwykłej pochodnej. W szczególności $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{v}^2}{2} = \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}$; $\mathbf{v}\nabla\frac{\mathbf{v}^2}{2} = \sum_{j=x,y,z} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k=x,y,z}\frac{v_k^2}{2} = \sum_{j,k=x,y,z} v_k v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$.

2. Jeśli istnieje potencjał Ω niezależny od czasu dla sił objętościowych, tzn. $\mathbf{F} = -\nabla\Omega(\mathbf{r})$, to $\mathbf{vF} = -\mathbf{v}\nabla\Omega = -(\frac{D}{Dt} - \frac{\partial}{\partial t})\Omega = -\frac{D\Omega}{Dt}$.

3. Wyrażenie $-\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\nabla p$ można przekształcić

$$-\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\nabla p = -\frac{1}{\rho}[\nabla(\mathbf{v}p) - p\nabla\mathbf{v}]. \tag{26}$$

Rozważmy zmianę energii wewnętrznej w wyniku pracy wykonanej nad elementem ośrodka o masie δm i prowadzącej do zmiany objętości . Wynosi ona $-pdV = -pd\frac{\delta m}{\rho} = p\frac{d\rho}{\rho^2}\delta m$. Stąd zmiana energii wewnętrznej na jednostkę masy wynosi $dE_w = \frac{pd\rho}{\rho^2}$. Dalej

$$\frac{DE_w}{Dt} = \frac{dE_w}{d\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{p}{\rho^2}(-\rho\nabla\mathbf{v}), \tag{27}$$

gdzie skorzystano z równia ciągłości. Stąd

$$-\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\nabla p = -\frac{1}{\rho}\nabla(\mathbf{v}p) + \frac{1}{\rho}p(-\frac{\rho}{p})\frac{DE_w}{Dt}. \tag{28}$$

Po uwzględnieniu 1-3 otrzymuje się

$$\frac{D}{Dt}[\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Omega + E_w] = -\frac{1}{\rho}\nabla(\mathbf{v}p). \tag{29}$$

Ostatnie wyrażenie należy pomnożyć przez $dm = \rho dV$ i scałkować po objętości. Korzystając z tego, że ρdV jako element masy jest stałe przy różniczkowaniu śledczym, można pochodną śledczą wystawić przed całkę. Po prawej stronie całkę objętościową z dywergencji zamienimy na powierzchniową. Ostatecznie otrzymamy

$$\frac{D}{Dt}\int_V [\rho\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Omega + \rho E_w]dV = -\oint_S \mathbf{v}p d\mathbf{S}. \tag{30}$$

Po lewej stronie mamy pochodną śledczą całkowitej energii ośrodka zawartej w objętości V (suma energii kinetycznej, potecjalnej i wewnętrznej); po prawej stronie mamy moc sił powierzchniowych.

Dla ośrodka nieściśliwego $\nabla\mathbf{v} = 0$ i nie ma zmiany energii wewnętrznej.

Zasada zachowania pędu też wynika z równania Eulera. Pomnóżmy je przez $dm = \rho dV$ i scałkujmy po objętości

$$\int_V \rho dV \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \int_V \rho dV \mathbf{F} - \int_V \rho dV \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{31}$$

W wyrazie po lewej stronie pochodną śledczą można napisać przed całką, która przedstawia całkowity pęd, tu oznaczony symbolem $\mathbf{G}$. Pierwszy wyraz po prawej stronie jest wypadkową siłą objętościową działającą na rozważany element ośrodka. Drugi wyraz zamieniony na całkę powierzchniową daje wypadkową siłę powierzchniową. Przyrost pędu elementu ośrodka jednosctce czasu jest więc równy wypadkowej sił działających ten element.

$$\frac{D\mathbf{G}}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt}\int_V \rho dV \mathbf{v} = \int_V \rho \mathbf{F} dV - \oint_S p d\mathbf{S}. \tag{32}$$

2 Ruch potencjalny i stacjonarny

2.1 Równane Bernoulliego

W przypadku ruchu potencjalnego pole prędkości jest gradientem pewnego pola skalarnego, tzn.

$$\mathbf{v} = \nabla\phi. \tag{33}$$

Nie należy mylić tej sytuacji z rozważanym już przypadkiem, gdy siły objętościowe są potencjalne.

Założenie to oznacza, że $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, bo $\nabla \times \nabla\phi \equiv 0$.

Zwróćmy uwagę, że jeśli przypiszemy polu prędkości stałą prędkość kątową $\vec{\omega}$, taką że $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$, to

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \equiv \vec{\omega}(\nabla \mathbf{r}) - (\vec{\omega}\nabla)\mathbf{r} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}. \tag{34}$$

Niezerowa rotacja pola oznacza więc istnienie pola prędkości kątowej, czyli wir. Potencjalność ruchu oznacza więc bezwirowość. Jak pokazane będzie później, wir nie powstaje, ale i nie ginie, jeśli siły objętościowe są zachowawcze i obowiązuje równanie fizyczne.

Załóżmy, że siły objętoścowe są zachowawcze, tzn. $\mathbf{F} = -\nabla\Omega(\mathbf{r})$, i obowiązuje równanie fizyczne $\rho = \rho(p)$. To ostatnie założenie pozwala przekształcić ostatni wyraz w równaniu Eulera. Odwróćmy zależność i napiszmy $p = p(\rho)$. Wtedy

$$\nabla p = \frac{dp}{d\rho}\nabla\rho, \tag{35}$$

a

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\nabla\rho = \frac{dP}{d\rho}\nabla\rho = \nabla P, \tag{36}$$

gdzie P jest zdefiniowane relacją $\frac{dP}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}$. Równanie Eulera przyjmuje postać

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(\Omega + P). \tag{37}$$

Dalsze przekształcenie wymaga zastosowania tożsamości, która będzie wyprowadzona. Rozważmy dwa wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Z wzrorów na podwójny iloczyn wektorowy mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) &= \nabla(\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \\ \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla(\underline{\mathbf{b}}\mathbf{a}) - (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}, \end{aligned} \tag{38}$$

gdzie podkreślenie oznacza, że obiekt nie jest różniczkowany. Po dodaniu powyższych relacji otrzymuje się

$$\nabla(\mathbf{ab}) = \nabla(\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{b}\underline{\mathbf{a}}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}. \tag{39}$$

W szczególności dla $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$ otrzymuje się

$$\nabla(\mathbf{v}^2) = 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}. \tag{40}$$

Dla ruchu potencjalnego $\mathbf{v} = \nabla\phi$ oraz $\nabla\times\mathbf{v} = 0$ i równanie Eulera przechodzi w

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \nabla(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2) = -\nabla(\Omega + P), \tag{41}$$

albo

$$\nabla(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Omega + P) = 0. \tag{42}$$

Oznacza to, że wyrażenie pod gradientem może być jedynie funkcją czasu

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Omega + P = \psi(t). \tag{43}$$

Ostatnie równanie nosi nazwę uogólnionego równania Bernoulliego. Opisuje ruch ruch potencjalny ośrodów ciągłych idealnych, spełniających równanie fizyczne, pod wpływem sił zachowawczych.

Ruch jest stacjonarny, jeśli prędkość w każdym punkcie jest stała w czasie. Wtedy otrzymujemy równanie Bernoulliego

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Omega + P = const. \tag{44}$$

Jeśli dodatkowo ośrodek jest nieściśliwy, tzn. $\rho = const$, to z różniczkowej definicji $\frac{dP}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}$ wynika, że $P = \frac{p}{\rho}$, a równanie Bernoulliego przybiera postać

$$\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \rho\Omega + p = const. \tag{45}$$

2.2 Równania Bernoulliego w przypadku ruchu niepotencjalnego

Równanie Bernoulliego można uogólnić dla ruchu niepotencjalnego. Linią prądu nazywa się krzywą, dla której styczna w każdym punkcie ma kierunek prędkości w tym punkcie. Równanie parametryczne tej krzywej jest postaci $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha)$, gdzie α jest parametrem, i spełnione jest równanie

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\alpha} = \lambda\mathbf{v}, \tag{46}$$

gdzie λ jest stałą. Dla ruchu stacjonarnego linia prądu jest torem cząstek ośrodka, dla ruchu niestacjonarnego linie prądu zmieniają kształy w czasie i tory cząstek nie są z nimi tożsame. W przypadku ruchu niepotencjalnego i stacjonarnego równanie (37) daje się zapisać jako

$$\frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = -\nabla(\Omega + P), \tag{47}$$

gdzie skorzystano z faktu, że $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = 0$ oraz użyto tożsamości (40). Przepisując ostatnie równanie otrzymuje się

$$\nabla[\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Omega + P] = \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}). \tag{48}$$

Sparametryzujmy linię prądu długością łuku s wzdłuż linii prądu. Spełnione jest równanie $d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = \lambda\mathbf{v}ds$.

Jeśli pomnożyć ostatnie równanie przez wektor $d\mathbf{s}$, to wyraz po lewej stronie zeruje się jako iloczyn skalarny prostopadłych wektorów. W konsekwencji

$$d\mathbf{s}\nabla[\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Omega + P] = 0. \tag{49}$$

Oznacza to, że przyrost wartości funkcji w nawiasie kwadratowym przy przesunięciu $d\mathbf{s}$ est równy zero, czyli

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Omega + P = const., \tag{50}$$

ale tylko wzdłuż linii prądu. Wartość stałej dla różnych linii prądu jest w ogólności różna.

Równanie Bernoulliego ma związek z zachowaniem energii.

Strugą nazywa się zbiór linii prądu ograniczonych rurką; ta ostatnia utworzona jest z linii prądu przechodzących przez pewną krzywą zamkniętą. Rozważmy objętość cienkiej strugi zamkniętą dwiema powierzchniami S i S' prostopadłymi do strugi. W czasie dt ubędzie energia $Svdt\rho(\frac{1}{2}v^2 + \Omega + E_w)$, a przybędzie energia $S'v'dt\rho'(\frac{1}{2}v'^2 + \Omega' + E'_w)$. Przyrost energii związny jest z różnicą parć na "denka" strugi, bo siły powierzchniowe są prostopadłe do powierzchni strugi. Bilans energii ma postać

$$S'v'dt\rho'(\frac{1}{2}v'^2 + \Omega' + E'_w) - Svdt\rho(\frac{1}{2}v^2 + \Omega + E_w) = pSvdt - p'S'v"dt. \tag{51}$$

Zachowanie masy daje $\rho Svdt = \rho' S'v'dt$, co implikuje

$$\frac{1}{2}v^2 + \Omega + E_w + \frac{p}{\rho} = const. \tag{52}$$

Ostatnią relację można przekształcić, pamiętając, że dla energii wewnętrznej zachodzi $dE_w = p\frac{d\rho}{\rho^2} = -pd\frac{1}{\rho}$. Wtedy całkując przez części dostaje się

$$E_w = -\int pd\frac{1}{\rho} = -\frac{p}{\rho} + \int \frac{1}{\rho}dp = -\frac{p}{\rho} + P. \tag{53}$$

Po wstawieniu ostatniej relacji otrzymuje się

$$\frac{1}{2}v^2 + \Omega + P = const. \tag{54}$$

Otrzymano więc równanie Bernoulliego dla linii prądu.

2.3 Przypadki szczególne

1. Ciecz idealna, nieściśliwa, w polu sił grawitacyjnych, przypadek stacjonarny. Przyspieszenie grawitacyjne skierowane jest wzdłuż osi z skierowanej w dół, tzn. $\Omega = -gz$. Niech p jest ciśnieniem na wysokości z, a p_0 - na wysokości $z = 0$. Równanie Bernoulliego daje

$$-\rho gz + p = p_0, \tag{55}$$

Cśnienie hydrostatyczne $p = p_0 + \rho gz$ rośnie z głębokością. Nie zależy od innych rozmiarów naczynia (paradoks hydrostatyczny).

2. Paradoks hydrodynamiczny

Weźmy poziomą rurę, tak aby pominąć wpływ siły grawitacji. W rurze znajdują się przewężenia. Ponieważ

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = const., \tag{56}$$

w przewężeniach rury, gdzie prędkość jest większa, jest obniżone ciśnienie. Może się zdarzyć, że jest mniejsze od atmosferycznego i do rury zasysane będzie powietrze.

3. Wypływ cieczy przez wąski otwór w naczyniu.

Niech pionowa oś z będzie skierowana w dół, a$z = 0$ odpowiada powierzchni cieczy. Równanie Bernoulliego daje

$$p - \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0, \tag{57}$$

gdzie pominięto prędkość górnego lustra cieczy; $p \approx p_0$ jest równe ciśnieniu atmosferycznemu. Wtedy

$$v = \sqrt{2gz}, \tag{58}$$

dla otworu znajdującego się na głębokości z.

4. Prawo Archimedesa.

Obliczmy wypadkową siłę i moment siły działający na ciało zanurzone w płynie. Jest to taka sama siła, jaka działa na element płynu o tym samym kształcie, co zanurzone ciało. Siła wynosi

$$\mathbf{Q} = -\oint_S p d\mathbf{S} = -\int_V \nabla p dV. \tag{59}$$

W sytuacji statycznej z równania Eulera wynika, że $\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\nabla p$; stąd

$$\mathbf{Q} = -\int_V \rho \mathbf{F} dV. \tag{60}$$

Dla siły grawitacji $\mathbf{F} = \mathbf{g}$ i

$$\mathbf{Q} = -\int_V \rho \mathbf{g} dV. \tag{61}$$

Jest to ciężar cieczy wypartej przez ciało.

Moment siły wynosi

$$\mathbf{M} = -\oint_S \mathbf{r} \times p d\mathbf{S}. \tag{62}$$

Korzystając z twierdzenia o zamianie całki powierzchniowej na objętościową dla dowolnego wektora $\mathbf{a}$, w formie

$$\oint_S \mathbf{a} \times d\mathbf{S} = -\int_V \nabla \times \mathbf{a} dV, \tag{63}$$

moment siły można napisać jako

$$\mathbf{M} = -\oint_S \mathbf{r} \times p d\mathbf{S} = -\int_V \nabla \times (p\mathbf{r}) dV = -\int_V [p\nabla \times \mathbf{r} - \mathbf{r} \times \nabla p] dV = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho dV. \tag{64}$$

W przypadku siły grawitacji $\mathbf{M} = \int_V \mathbf{r} \rho dV \times \mathbf{g}$.