Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.12

1 Elementy fizyki bryły sztywnej - przykłady

1.1 Drabina

Drabina o długości $2l$ i masie m oparta jest o pionową ścianę, a jej podstawa może przesuwać się wzdłuż osi poziomej x. Nie ma ruchu w kierunku z. Nie ma tarcia. Działa siła ciężkości w kierunku pionowym y.

Podłoże wywiera siłę reakcji R_y skierowaną pionowo w górę i przyłożoną w punkcie styku drabiny z podłogą. Ściana wywiera siłę reakcji R_x skierowaną poziomo i przyłożoną w punkcie styku drabiny ze ścianą.

Niech (x_S, y_S) oznaczają współrzędne środka masy S. Spełnione są równania

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_S &= R_x, \\ m\ddot{y}_S &= -mg + R_y. \end{aligned} \tag{1}$$

Drabina wykonuje ruch obrotowy płaski; niech α będzie kątem między drabiną a pionową ścianą . W układzie środka masy spełnione jest równanie

$$I^S\ddot{\alpha} = x_S R_y - y_S R_x \tag{2}$$

(moment siły ciężkości jest równy zero, bo jest przyłożona w środku masy).

Więzy implikują zależności

$$\begin{aligned} x_S = l\sin\alpha,\ \ \dot{x}_S = l\dot{\alpha}\cos\alpha,\ \ \ddot{x}_S = -l\dot{\alpha}^2\sin\alpha + l\ddot{\alpha}\cos\alpha, \\ y_S = l\cos\alpha,\ \ \dot{y}_S = -l\dot{\alpha}\sin\alpha,\ \ \ddot{y}_S = -l\dot{\alpha}^2\cos\alpha - l\ddot{\alpha}\sin\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Stąd

$$\begin{aligned} R_x &= m\ddot{x}_S = m(-l\dot{\alpha}^2\sin\alpha + l\ddot{\alpha}\cos\alpha), \\ R_y &= mg + m\ddot{y}_S = mg + m(-l\dot{\alpha}^2\cos\alpha - l\ddot{\alpha}\sin\alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

Po podstawieniu równanie ruchu obrotowego ma postać

$$I^S\ddot{\alpha} = -ml^2\ddot{\alpha} + mgl\sin\alpha \tag{5}$$

albo

$$I\ddot{\alpha} = mgl\sin\alpha, \tag{6}$$

gdzie $I = I^S + ml^2$.

To samo równanie można otrzymać jako równanie Lagrange'a II rodzaju. Energia kinetyczna ma postać

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2) + \frac{1}{2}I^S\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2. \tag{7}$$

Energia potencjalna wysokości wynosi $V = mgl\cos\alpha$. Stąd

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 - mgl\cos\alpha. \tag{8}$$

Równanie Lagrange'a ma postać

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = I\ddot{\alpha} - mgl\sin\alpha = 0. \tag{9}$$

Po pomnożeniu ostatniego równania przez $\dot{\alpha}$ można je scałkować

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 - g^2\cos\alpha = \frac{1}{2}\dot{\alpha}_0^2 - g^2\cos\alpha_0, \tag{10}$$

gdzie $g^2 = \frac{mgl}{I}$. Równanie to przedstawia zachowanie energii (po pomnożeniu przez ml^2).

Jeśli w chwili $t = 0$ drabina nie poruszała się i była nachylona pod kątem α_0, to otrzymujemy

$$\dot{\alpha} = \sqrt{2g^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}, \tag{11}$$

oraz rozwiązanie dla funkcji odwrotnej $t = t(\alpha)$

$$t = \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{2g^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}}. \tag{12}$$

Rozwiązanie jest słuszne dla $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Można zakres przedłużyć, dopuszczając, by opadający koniec mógł opaść poniżej poziomu podłogi.

1.2 Wymuszanie obrotu wirującej bryły

Niech bryła o symetrii obrotowej wiruje wokół osi symetrii ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}_0$. Poszukuje się momentu siły $\mathbf{D}$, jaki trzeba przyłożyć, aby bryła wykonywała obrót z prędkością $\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1$ wokół punktu $O' = O$ leżącego na osi symetrii. Spełnione jest równania

$$\hat{I}\frac{d'(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1)}{dt} + (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \hat{I}(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) = \mathbf{D}. \tag{13}$$

Prędkość kątowa $\vec{\omega}_0$ ma stałą wartość i kierunek osi symetrii bryły, stały w U', stąd $\frac{d'\vec{\omega}_0}{dt} = 0$.

Weźmy układ U'', obracający się z prędkością kątową $-\vec{\omega}_0$ względem U', czyli z prędkością kątową $\vec{\omega}_1$ względem U. Zachodzi

$$\frac{d'\hat{I}\vec{\omega}_1}{dt} = \frac{d''\hat{I}\vec{\omega}_1}{dt} - \vec{\omega}_0 \times \hat{I}\vec{\omega}_1. \tag{14}$$

Stąd równanie ruchu można napisać jako

$$\frac{d''\hat{I}\vec{\omega}_1}{dt} + \vec{\omega}_0 \times \hat{I}\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 \times \hat{I}\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 \times \hat{I}\vec{\omega}_1 = \mathbf{D} \tag{15}$$

Wektor $\vec{\omega}_0$ jest skierowany wzdłuż osi symetrii bryły, która wyznacza kierunek główny tensora $\hat{I}$, czyli $\hat{I}\vec{\omega}_0 = I_{\omega_0}\vec{\omega}_0$; stąd wektory $\vec{\omega}_0$ i $\hat{I}\vec{\omega}_0$ są równoległe i ich iloczyn wektorowy znika.

Jeśli wektor $\vec{\omega}_1$ jest prostopadły do osi symetrii, to także jest skierowany wzdłuż osi głównej tensora; wtedy $\hat{I}\vec{\omega}_1 = I_{\omega_1}\vec{\omega}_1$; stąd wektory $\vec{\omega}_1$ i $\hat{I}\vec{\omega}_1$ są równoległe i ich iloczyn wektorowy znika. Moment bezwładności I_{ω_1} nie zależy od czasu, momenty bezwładności względem wszystkich osi prostopadłych do osi symetrii są równe z powodu symetrii obrotowej.

Jeśli dodatkowo prędkość kątowa $\vec{\omega}_1$ jest stała w U, to jest także stała w U'', bo $\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \frac{d''\vec{\omega}_1}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_1 = \frac{d''\vec{\omega}_1}{dt}$.

Przy tych wszystkich założeniach

$$\mathbf{D} = \vec{\omega}_1 \times \hat{I}\vec{\omega}_0 = I_{\omega_0}\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0. \tag{16}$$

Moment siły jest prostopadły do $\vec{\omega}_0$ i $\vec{\omega}_1$, a jego wartość jest tym większa, im większe są wartości obu prędkości kątowych.

1.3 Bąk swobodny - analiza jakościowa

Rozpatrzmy bryłę sztywną, na którą nie działa moment siły. Może to być planeta obracająca się wokół środka masy i znajdująca się w polu grawitacyjnym jednorodnym lub planeta sferycznie symetryczna w polu sił centralnych.

Dla ciała w polu grawitacyjnym jednorodnym momenty sił względem środka masy wynosi $\mathbf{D}^S = \sum_i \mathbf{r}_i^S \times m_i \mathbf{g} = (\sum_i m_i \mathbf{r}_i^S) \times \mathbf{g} = 0 \times \mathbf{g} = 0$.

Potencjał oddziaływania grawitacyjnego między umieszczoną w początku układu jednorodną kulą o masie m i promieniu ρ a punktową masą M umieszczoną w punkcie $\mathbf{s}$ wynosi

$$V(\mathbf{s}) = -\int \frac{GMdm}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}, \tag{17}$$

gdzie całkowanie odbywa się po masie jednorodnej kuli o gęstości d i promieniu ρ. Przechodząc do całkowania po jej objętości można napisać

$$V = -GMd\int \frac{d^3r}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} = -GMd\int_0^\rho dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta}}, \tag{18}$$

gdzie wprowadzono współrzdne sferyczne, θ jest kątem między wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$. Całka po $d\phi$ daje 2π, całkę do $d\theta$ wykonuje się podstawiając $\cos\theta = u$

$$\begin{aligned} V = -GMd2\pi \int_0^\rho drr^2 \int_{-1}^1 du \frac{1}{\sqrt{r^2+s^2-2rsu}} = \\ -GMd2\pi \int_0^\rho r^2 \frac{1}{-2rs} 2[|r-s|-(r+s)] \end{aligned} \tag{19}$$

Dla $s > r$, tzn. dla masy M umieszczonej na zewnątrz rozważanej bryły $|r-s| = s-r$. Wtedy

$$V = -GMd2\pi\frac{1}{s}\int_0^\rho 2r^2dr = -GMd\frac{1}{s}\frac{4\pi}{3}\rho^3 = -\frac{GMm}{s}. \tag{20}$$

Potencjał jest więc taki sam, jak gdyby bryłę o masie m ściągnąć do jednego punktu. Siła działająca na bryłę jest więc przyłożona w w środku masy (i symetrii), a jej moment względem środka masy jest równa zero.

Rozważając przypadek masy M umieszczonej wewnątrz bryły, należałoby podzielić obszar całkowania na część z $r < \rho$ i z $r > \rho$. Otrzymano by wynik, że niezerowa siła działa między masą M a ściągniętą do punktu tą częścią bryły, która jest bliżej jej środka niż masa M.

Bąkiem swobodnym jest też bryła obracająca się wokół punktu spoczywającego w układzie inercjalnym.

Dla bąka swobodnego musi być zachowana energia, moment pędu w układzie inercjalnym i jego długość także w układzie z U' związanym z bryłą. Niech osie układu U' są kierunkami głównymi tensora bezwładności z $I_{x'} < I_{y'} < I_{z'}$. Spełnione są równania Eulera (opuszczono indeks górny S przy momencie bezwładności względem środka masy)

$$\begin{aligned} I_{x'}\dot{\omega}_{x'} &= (I_{y'} - I_{z'})\omega_{y'}\omega_{z'}, \\ I_{y'}\dot{\omega}_{y'} &= (I_{z'} - I_{x'})\omega_{z'}\omega_{x'} \\ I_{z'}\dot{\omega}_{z'} &= (I_{x'} - I_{y'})\omega_{x'}\omega_{y'}. \end{aligned} \tag{21}$$

Jeśli równania te pomnożyć odpowiednio przez $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ i dodać, otrzymuje się

$$\frac{d}{dt}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) = \frac{d}{dt}2T = 0, \tag{22}$$

gdzie $T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\hat{I}\vec{\omega}$ jest energią.

Jeśli równania Eulera pomnożyć odpowiednio przez $I_{x'}\omega_{x'}$, $I_{y'}\omega_{y'}$, $I_{z'}\omega_{z'}$ i dodać, otrzymuje się

$$\frac{d}{dt}(I_{x'}^2\omega_{x'}^2 + I_{y'}^2\omega_{y'}^2 + I_{z'}^2\omega_{z'}^2) = \frac{d}{dt}J^2 = 0, \tag{23}$$

Równania powyższe są opisują elipsoidy w zmiennych $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{x'}^2}{\frac{2T}{I_{x'}}} + \frac{\omega_{y'}^2}{\frac{2T}{I_{y'}}} + \frac{\omega_{z'}^2}{\frac{2T}{I_{z'}}} &= 1, \\ \frac{\omega_{x'}^2}{\frac{J^2}{I_{x'}^2}} + \frac{\omega_{y'}^2}{\frac{J^2}{I_{y'}^2}} + \frac{\omega_{z'}^2}{\frac{J^2}{I_{z'}^2}} &= 1. \end{aligned} \tag{24}$$

Osie elipsoid leżą na osiach x', y', z', mają one środek w początku układów Ui U' i ich długości są stosunku $\frac{1}{\sqrt{I_{x'}}} : \frac{1}{\sqrt{I_{y'}}} : \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}}$ dla elipsoidy energii oraz $\frac{1}{I_{x'}} : \frac{1}{I_{y'}} : \frac{1}{I_{z'}}$ dla elipsoidy momentu pędu. ta ostatnia jest bardziej wysmuklona.

Koniec wektora $\vec{\omega}$ zakreśla w układzie U' krzywą zwaną polhodią, a w układzie U - herpolhodią. Polhodia musi mieć koniec na linii przecięcia obu elipsoid.

Rozważmy zachowanie polhodii ustalając energię i zmieniając długość momentu pędu. Dla bardzo małych J^2 elipsoidy się nie przecinają i ruch jest niemożliwy. Przy zwiększaniu J^2 dochodzimy do sytuacji, gdy największe osie elipsoid są równe Ruch odbywa się wtedy wokół osi x' - osi głównej najmniejszego momentu bezwładności; polhodia składa się z dwóch punktów. Dalsze zwiększanie J^2 powoduje, że elipsoidy przecinają się wzdłuż elipsy, której równanie otrzymuje się eliminując w równań elipsoid zmienną $\omega_{x'}$

$$I_{y'}(I_{y'} - I_{x'})\omega_{y'}^2 + I_{z'}(I_{z'} - I_{x'})\omega_{z'}^2 = J^2 - 2TI_{x'}. \tag{25}$$

Rzut polhodii na płaszczyznę $(x'z')$ przedstawia hiperbolę

$$I_{x'}(I_{x'} - I_{y'})\omega_{x'}^2 + I_{z'}(I_{z'} - I_{y'})\omega_{z'}^2 = J^2 - 2TI_{y'}. \tag{26}$$

Dalsze zwiększanie J^2 prowadzi do równości średnich osi elipsoid

$$\frac{J^2}{I_{y'}^2} = \frac{2T}{I_{y'}}. \tag{27}$$

Rzut polhodii na płaszczyznę $(x'z')$ daje dwie przecinające się proste.

Gdy J^2 dalej wzrasta, rzut polhodii na płaszczyznę $(x'z')$ znów jest hiperbolą z zamienionymi rolami osi x' i z'. Rzut polhodii na płaszczyznę $(x'y')$ staje się elipsą, która ściąga się do punktu, gdy równe stają się najmniejsze sie elipsoid. Wtedy ruch odbywa się wokół osi z'. Jeszcze większa wartość J^2 powoduje nieprzecinanie się elipsoid i niemożność ruchu.

W ten sposób widać, że prędkość kątowa jest stała w U', gdy ma kierunek osi głównej tensora bezwładności. Dodatkowo, gdy ruch odbywa się wokół osi głównej o największym lub najmniejszym momencie bezwładności, niewielkie zaburzenie powoduje, że wektor $\vec{\omega}$ pozostaje w otoczeniu pierwotnego kierunku. W przypadku osi o średnim momencie bezwładności zaburzenie takie ma charakter nietrwały: ruch wokół osi y' przechodzi w ruch o polhodii w postaci elipsy otaczającej oś x' lub z'.

W układzie inercjalnym zachodzi $\mathbf{J} = \hat{I}\vec{\omega} = const$ oraz $T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\hat{I}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\mathbf{J} = const$. Oznacza to, że $\vec{\omega}_{||}$ - rzut wektora $\vec{\omega}$ na kierunek $\mathbf{J}$ jest zachowany. Koniec wektora $\vec{\omega}$ porusza się po krzywej leżącej w stałej płaszczyźnie $\vec{\omega}_{||} = const$.

Chwilowa oś obrotu $\vec{\omega}$ leży i na polhodii i na herpolhodii; można powiedzieć, że polhodia toczy się po herpolhodii.

1.4 Bąk symetryczny swobodny

Zakładamy że elipsoida bezwładności jest obrotowa, a środek masy leży na osi symetrii bryły. Przyjmujemy, że $I_{x'} = I_{y'}$. Równania Eulera sprowadzają się do postaci

$$\begin{aligned} I_{x'}\dot{\omega}_{x'} &= (I_{x'} - I_{z'})\omega_{y'}\omega_{z'}, \\ I_{y'}\dot{\omega}_{y'} &= (I_{z'} - I_{x'})\omega_{z'}\omega_{x'} \\ I_{z'}\dot{\omega}_{z'} &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Stąd $\omega_{z'} = \omega_{z'0} = const$, czyli

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x'} &= \alpha\omega_{y'} \\ \dot{\omega}_{y'} &= -\alpha\omega_{x'}, \end{aligned} \tag{29}$$

gdzie $\alpha = \frac{(I_{x'} - I_{z'})\omega_{z'0}}{I'_x}$.

Rozwiązanie równań Eulera ma postać

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= h\sin(\alpha t + \gamma), \\ \omega_{y'} &= h\cos(\alpha t + \gamma), \\ \omega_{z'} &= \omega_{z'0}. \end{aligned} \tag{30}$$

Polhodia jest więc okręgiem o promieniu h leżącym w płaszczyźnie $z' = \omega_{z'0}$. Ruch jest okresowy z prędkością kątową (częstością kołową) α.

Podobnie wygląda ewolucja wektora momentu pędu w układzie U'

$$\begin{aligned} J_{x'} &= I_{x'}\omega_{x'} = I_{x'}h\sin(\alpha t + \gamma), \\ J_{y'} &= I_{x'}\omega_{y'} = I_{x'}h\cos(\alpha t + \gamma), \\ J_{z'} &= I_{z'}\omega_{z'} = I_{z'}\omega_{z'0}. \end{aligned} \tag{31}$$

Koniec wektora $\mathbf{J}$ zakreśla z prędkością kątową (częstością kołową) α okrąg o promieniu $I_{x'}h$ w płaszczyźnie $z' = I_{x'}\omega_{z'0}$.

Jak pokazano wyżej, składowe prędkości kątowej wyrażają się przez kąty Eulera

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi = h\sin(\alpha t + \gamma), \\
\omega_{y'} &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = h\cos(\alpha t + \gamma), \\
\omega_{z'} &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} = \omega_{z'0}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Niech oś z ma kierunek wektora $\mathbf{J}$ (stały). Wobec zachowania J_z i $J_{z'}$ kąt θ, czyli kąt między osiami z i z', jest stały $\theta = \theta_0$ i $\dot{\theta} = 0$. Równania przyjmująwięc postać

$$\begin{aligned}
&\dot{\phi}\sin\theta_0\sin\psi = h\sin(\alpha t + \gamma), \\
&\dot{\phi}\sin\theta_0\cos\psi = h\cos(\alpha t + \gamma), \\
&\dot{\phi}\cos\theta_0 + \dot{\psi} = \omega_{z'0}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Podzielenie pierwszego równania przez drugie daje

$$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}(\alpha \mathrm{t} + \gamma), \tag{34}$$

czyli

$$\psi(t) = \alpha t + \psi_0 = \frac{(I_{x'} - I_{z'})\omega_{z'0}}{I_{x'}}t + \psi_0, \tag{35}$$

gdzie $\psi_0 = \psi(t = 0)$.

Trzecie z równań sprowadza się do

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_{z'0} - \alpha}{\cos\theta_0}, \tag{36}$$

czyli

$$\phi(t) = \frac{\omega_{z'0} - \alpha}{\cos\theta_0}t + \phi_0 = \frac{I_{z'}\omega_{z'0}}{I_{x'}\cos\theta_0} + \phi_0, \tag{37}$$

gdzie $\phi_0 = \phi(t = 0)$. Ruch jest złożeniem dwóch ruchów o stałych prędkościach kątowych odpowiednio względem osi z i z'

$$\vec{\omega} = \mathbf{k}\frac{I_{z'}\omega_{z'0}}{I_{x'}\cos\theta_0} + \mathbf{k}'\frac{(I_{x'} - I_{z'})\omega_{z'0}}{I_{x'}}. \tag{38}$$

Taki ruch nazywa się precesją regularną

Zbierzmy składowe wektora $\vec{\omega}$ w obu układach odniesienia. Ponieważ

$$\vec{\omega} = \mathbf{k}\dot{\phi} + \mathbf{k}'\dot{\psi}, \tag{39}$$

zachodzi

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \mathbf{i}'\vec{\omega} = \sin\psi \sin\theta_0 \dot{\phi}, \\
\omega_{y'} &= \mathbf{j}'\vec{\omega} = \cos\psi \sin\theta_0 \dot{\phi}, \\
\omega_{z'} &= \mathbf{k}'\vec{\omega} = \cos\theta_0 \dot{\phi} + \dot{\psi} = \omega_{z'0}, \qquad (40) \\
\omega_{x} &= \mathbf{i}\vec{\omega} = \sin\phi \sin\theta_0 \dot{\psi}, \\
\omega_{y} &= \mathbf{j}\vec{\omega} = -\cos\phi \sin\theta_0 \dot{\psi}, \\
\omega_{z} &= \mathbf{k}\vec{\omega} = \cos\theta_0 \dot{\psi} + \dot{\phi} \qquad (41)
\end{aligned}$$

Składowe ω_z i $\omega_{z'}$ są stałe w czasie. Rzuty $\vec{\omega}$ na płaszczyzny (xy) oraz $(x'y')$ wykonują obrót odpowiednio o kąty ϕ i ψ. Wynika stąd, że oś obrotu $\vec{\omega}$ zakreśla w U powierzchnię stożka (herpolhodii) z prędkością kątową $\dot{\phi}$, a w układzie U' - powierzchnię stożka (polhodii) z prędkością kątową $\dot{\psi}$.

Oś symetrii bąka zakreśla z prędkością kątową $\dot{\phi}$ w układzie U stożek obrotowy dokoła osi z (nie wykonuje obrotu wokół osi z').

W przypadku Ziemi, z powodu jej spłaszczenia, $\frac{(I_{x'}-I_{z'})}{I_{x'}} \approx \frac{1}{300}$, a $\omega_{z'0} \approx \frac{2\pi}{24h}$. Stąd okres obrotu o kąt ψ wynosi ok. 300 dni. W rzeczywistości Ziemi nie można traktować jako bryły ściśle sztywnej: podlega elastycznym odkształceniom oraz zachodzi przesuwanie się mas na powierzchni i wewnątrz planety. Punkt przecięcia osi obrotu z powierzchnią Ziemi porusza się ruchem nieregularnym, różnym w różnych latach, z wyśredniowanym okresem ok. 14 miesięcy. Ponadto Ziemia nie jest ściśle bąkiem swobodnym.

2 Bąk symetryczny ciężki

Bąk jest poddany działaniu momentu siły. Niech pole zewnętrzne będzie jednorodne, ale punkt $O = O'$, wokół którego obraca się bąk nie jest jego środkiem masy.

Energia kinetyczna ma postać

$$T = \frac{1}{2}[I_{x'}(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + I_{z'}\omega_{z'}^2] =$$

$$\frac{1}{2}\{I_{x'}[(\dot\phi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi)^2+(\dot\phi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi)^2]+I_{z'}(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)^2\}=$$
$$\frac{1}{2}[I_{x'}(\sin^2\theta\dot\phi^2+\dot\theta^2)+I_{z'}(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)^2]. \tag{42}$$

Energia potencjalna ma postać

$$V=\sum_i m_i g z_i = Mgz_S = MgR\cos\theta. \tag{43}$$

Założono, że środek masy leży na osi z' w odległości R od punktu O (czyli $\mathbf{R}$ jest położeniem środka masy w układzie U'), a przyspieszenie g działa wzdłuż osi z. Lagranżjan ma postać $L=T-V$. Zmienne ϕ i ψ nie występują w lagranżjanie, czyli są cykliczne. Pędy uogólnione z nimi związane są stałymi ruchu

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_{z'}(\cos\theta\dot\phi+\dot\psi)=const \tag{44}$$
$$p_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}=I_{x'}\sin^2\theta\dot\phi+I_{z'}(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)\cos\theta=I_{x'}\sin^2\theta\dot\phi+p_\psi\cos\theta=const.$$

Te pędy uogólnione są składowymi momentu pędu

$$J_{z'}=I_{z'}\omega_{z'}=I_{z'}(\cos\theta\dot\phi+\dot\psi)=p_\psi, \tag{45}$$
$$J_z=\mathbf{k}(I_{x'}\omega_{x'}\mathbf{i'}+I_{x'}\omega_{y'}\mathbf{j'}+I_{z'}\omega_{z'}\mathbf{k'})=$$
$$I_{x'}[(\dot\phi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi)\sin\theta\sin\psi+(\dot\phi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi)\sin\theta\cos\psi]$$
$$+I_{z'}(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)\cos\theta=I_{x'}\sin^2\theta\dot\phi+I_{z'}(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)\cos\theta=p_\phi. \tag{46}$$

Zamiast pierwszego całkowania równania Lagrange'a dla zmiennej θ można skorzystać z zachowania energii

$$\frac{1}{2}[I_{x'}(\sin^2\theta\dot\phi^2+\dot\theta^2)+I_{z'}(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)^2]+MgR\cos\theta=E, \tag{47}$$

lub po wyrażeniu prędkości uogólnionych przez pędy uogólnione

$$\frac{1}{2}I_{x'}[\sin^2\theta\frac{(p_\phi-p_\psi\cos\theta)^2}{(I_{x'}\sin^2\theta)^2}+\dot\theta^2]+\frac{1}{2I_{z'}}p_\psi^2+MgR\cos\theta=E, \tag{48}$$

Analizę rozwiązania można przeprowadzić podstawiając

$$\cos\theta=\xi,\ \ -\sin\theta\dot\theta=\dot\xi,\ \ \dot\theta^2=\frac{\dot\xi^2}{1-\xi^2}. \tag{49}$$

Po podstawieniu otrzymuje się

$$\frac{1}{2I_{x'}}\frac{(p_\phi - p_\psi\xi)^2}{1-\xi^2} + \frac{I_{x'}}{2}\frac{\dot{\xi}^2}{1-\xi^2} + \frac{1}{2I_{z'}}p_\psi^2 + MgR\xi = E. \tag{50}$$

Stąd

$$\dot{\xi}^2 = [(E - MgR\xi - \frac{1}{2I_{z'}}p_\psi^2)(1-\xi^2) - \frac{(p_\phi - p_\psi\xi)^2}{2I_{x'}}]\frac{2}{I_{x'}} \equiv f(\xi). \tag{51}$$

Funkcja $f(\xi)$ jest wielomianem trzeciego stopnia i daje się zapisać jako

$$f(\xi) = \frac{2MgR}{I_{x'}}(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3), \tag{52}$$

gdzie ξ_j są uporządkowanymi rosnąco pierwiastkami wielomianu. Wartość wielomianu zmierza do ∞ dla $\xi \to \infty$ i do $-\infty$ dla $\xi \to -\infty$. Funkcja f ma dodatnią wartość dla ξ z przedziału (ξ_1, ξ_2) oraz dla $\xi > \xi_3$. Dodatkowo $f(\pm 1) < 0$. Stąd $\xi_3 > 1$, a $\xi_1 > -1$. Fizyczny sens ma tylko zakres $-1 < \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 < 1$, bo ξ jest kosinusem rzeczywistego kąta, a $f(\xi)$ jest kwadratem pochodnej $\dot{\xi}$.

Rozwiązanie dla funkcji odwrotnej daje się napisać jako

$$t - t_0 = \pm\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}. \tag{53}$$

Znak trzeba wybrać tak, aby funkcja po prawej stronie była rosnąca. Funkcja $\xi(t)$ jest okresowa, a jej okres wynosi

$$T = 2\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}. \tag{54}$$

Można też wyznaczyć kąt ϕ. Mamy

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_{x'}\sin^2\theta}, \tag{55}$$

a więc

$$\phi(t) - \phi_0 = \int_{t_0}^{t}\frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta(t)}{I_{x'}\sin^2\theta(t)}dt = \int_{\xi_0}^{\xi(t)}\frac{p_\phi - p_\psi\xi}{I_{x'}(1-\xi^2)}\frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}. \tag{56}$$

Po czasie T kąt ϕ zmieni się o

$$\Delta\phi = 2\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{p_\phi - p_\psi \xi}{I_{x'}(1-\xi^2)} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}. \tag{57}$$

Podobnie można obliczyć $\psi = \psi(t)$.

Jakościową nowością w porównaniu z precesją regularną są okresowe zmiany kąta $\theta = \arccos \xi$, czyli tzw. nutacje. Redukują się one do zera, gdy $\xi_1 = \xi_2$, czyli funkcja f ma pierwiastek podwójny. Przy małych nutacjach precesja nazywa się pseudoregularną.

W przypadku Ziemi wpływ Słońca i Księżyca na części Ziemi stanowiące jej odstępstwo od kształtu kulistego powoduje precesję pseudoregularną o okresie ok. 26000 lat. Okres nutacji jest rzędu 18.6 lat, a zmiany kąta θ są rzędu 9 sekund łuku.