Andrzej Raczyński

# Mechanika klasyczna cz.11

## 1 Elementy fizyki bryły sztywnej

Bryła sztywna jest kolejnym modelem - idealizacją istniejących obiektów. Jest to zespół skończonej lub nieskończonej (nawet nieprzeliczalnej) liczby punktów materialnych, taki że odległość każdej pary punktów jest ustalona. Z doświadczenia wynika, że siły reakcji odpowiadające za te więzy, czyli nadające spójność bryle, spełniają trzecią zasadę dynamiki i są centralne. Oczywiście tak określone więzy nie są niezależne.

Aby jednoznacznie określić położenie takiego ciała, wystarczy podać położenia trzech jego punktów: ustalenie położenia pierwszego punktu (3 współrzędne) pozwala jeszcze na obrót wokół trzech osi; ustalenie drugiego punktu (2 dodatkowe niezależne współrzędne) pozostawia jeszcze możliwość obrotu wokół jednej osi; ustalenie trzeciego punktu jednoznacznie lokalizuje ciało.

Współrzędne tych trzech punktów są ograniczone trzema równaniami więzów (ustalone odległości punktów 1-2, 2-3, 3-1). Bryła sztywna jest więc układem o 6 stopniach swobody, chyba że nałożono dodatkowo $p$ więzów zewnętrznych; wtedy liczba stopni swobody wynosi $f = 6 - p$

Niech układ $U'$ będzie sztywno związany z bryłą, tzn. bryła się w nim nie porusza. Wygodny zespół 6 współrzędnych opisujących położenie bryły w układzie inercjalnym $U$ to 3 kartezjańskie współrzędne jednego punktu (często wybiera się środek masy) oraz trzy kąty Eulera $\phi, \theta, \psi$.

Przesuńmy chwilowo układ $U$, tak aby jego początek $O$ pokrywał się z początkiem $O'$ układu $U'$. Płaszczyzny $(xy)$ oraz $(x'y')$ przecinają się wzdłuż prostej zwanej linią węzłów $\mathbf{w}$. Można przeprowadzić osie układu $U$ w osie układu $U'$ przez trzy kolejne transformacje:
1. obrót wokół osi $z$ o kąt $\phi$, tak aby oś $x$ pokryła się z linią węzłów;
2. obrót wokół linii węzłów (czyli nowej osi $x$) o kąt $\theta$, tak aby oś $z$ pokryła się z osią $z'$;
3. obrót wokół osi $z'$ o kąt $\psi$, tak aby nowa oś $x$ (czyli oś $\mathbf{w}$) pokryła się z

osią $x'$.

Można napisać

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

a także

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}, \\ \mathbf{w} &= \cos\psi\mathbf{i}' - \sin\psi\mathbf{j}'. \end{aligned} \tag{2}$$

Wektor prędkości kątowej $\omega$ można rozłożyć w nieortogonalnej bazie

$$\vec{\omega} = \mathbf{k}\dot{\phi} + \mathbf{w}\dot{\theta} + \mathbf{k}'\dot{\psi}. \tag{3}$$

W dalszym ciągu potrzebne będą w szczególności relacje wynikające z powyższych związków

$$\begin{aligned} \mathbf{i}'\mathbf{k} &= \sin\theta\sin\psi, \\ \mathbf{i}'\mathbf{w} &= \cos\psi, \\ \mathbf{i}'\mathbf{k}' &= 0, \\ \mathbf{j}'\mathbf{k} &= \sin\theta\cos\psi, \\ \mathbf{j}'\mathbf{w} &= -\sin\psi, \\ \mathbf{j}'\mathbf{k}' &= 0, \\ \mathbf{k}'\mathbf{k} &= \cos\theta, \\ \mathbf{k}'\mathbf{w} &= 0, \\ \mathbf{k}'\mathbf{i} &= \sin\theta\sin\phi, \\ \mathbf{k}'\mathbf{j} &= -\sin\theta\cos\phi. \end{aligned} \tag{4}$$

Dzięki tym relacjom można rozłożyć wektor prędkości kątowej w układzie $U'$

$$\vec{\omega} = \omega_{x'}\mathbf{i}' + \omega_{y'}\mathbf{j}' + \omega_{z'}\mathbf{k}', \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \mathbf{i}'\vec{\omega} = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_{y'} &= \mathbf{j}'\vec{\omega} = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_{z'} &= \mathbf{k}'\vec{\omega} = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{6}$$

## 1.1 Moment pędu bryły sztywnej

Moment pędu bryły sztywnej jest sumą (lub całką) momentów pędu jej części składowych

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \quad lub \quad \mathbf{J} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm. \tag{7}$$

Niżej stosowany będzie zapis w postaci sumy.

Wyrażając wielkości w układzie $U$ przez wielkości w $U'$ otrzymujemy

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}'_i, \tag{8}$$

gdyż $\mathbf{v}'_i = 0$. Pisząc $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i$ otrzymujemy

$$\mathbf{J} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = M\mathbf{R} \times \mathbf{v}_{tr} + \sum_i m_i(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i) \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'_i) =$$
$$M\mathbf{R} \times \mathbf{v}_{tr} + M\mathbf{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \mathbf{R}') + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'_i). \tag{9}$$

Wektor $\mathbf{R}'$ w drugim wyrazie jest położeniem środka masy w układzie $U'$; znika, jeśli początek $O'$ układu $U'$ zaczepimy właśnie w środku masy $S$.

Ostatni wyraz traktować można jako wynik działania operatora-tensora $\hat{I}$ na wektor $\vec{\omega}$. Napiszmy najpierw, korzystając z tożasamości dla podwójnego iloczynu wektorowego

$$\hat{I}\vec{\omega} = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i[(r'_i)^2\vec{\omega} - \mathbf{r}'_i(\vec{\omega}\mathbf{r}'_i)]. \tag{10}$$

Biorąc wektor jednostkowy $\mathbf{e}$ w dowolnym kierunku możemy napisać moment bezwładności względem osi $\mathbf{e}$

$$I_e = \mathbf{e}\hat{I}\mathbf{e} = \sum_i m_i[(r'_i)^2 - (\mathbf{e}\mathbf{r}'_i)(\mathbf{e}\mathbf{r}'_i)] = \sum_i m_i(r'_{i\perp})^2, \tag{11}$$

gdzie $r'_{i\perp}$ jest odległością $i - tego$ punktu od osi o kierunku $\mathbf{e}$ przechodzącej przez punkt $O'$.

Rozkładając występujące tu wektory w bazie ortonarmalnej $\mathbf{e}'_j$ (inne oznaczenie dla $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$), tzn. pisząc

$$\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{3} \omega'_j \mathbf{e}'_j,$$

$$\mathbf{r}'_i = \sum_{j=1}^{3} x'_{ij}\mathbf{e}'_j \tag{12}$$

$$\hat{I}\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{3} (\hat{I}\omega)'\mathbf{e}'_j, \tag{13}$$

otrzymamy

$$\sum_k (\hat{I}\vec{\omega})'_k \mathbf{e}'_k = \sum_i m_i[(r'_i)^2 \sum_s \omega'_s \mathbf{e}'_s - \sum_k x'_{ik}\mathbf{e}'_k \sum_s x'_{is}\omega_s], \tag{14}$$

lub w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} (\hat{I}\vec{\omega})'_{x'} \\ (\hat{I}\vec{\omega})'_{y'} \\ (\hat{I}\vec{\omega})'_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'} & -D_{x'y'} & -D_{x'z'} \\ -D_{y'x'} & I_{y'} & -D_{y'z'} \\ -D_{z'x'} & -D_{z'y'} & I_{z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

gdzie element macierzy o indeksach $jk$ ma postać $I_{jk} = \mathbf{e}'_J \hat{I}\mathbf{e}'_k$, czyli

$$\begin{aligned}
I_{x'} &= \mathbf{i}'\hat{I}\mathbf{i}' = \sum_i m_i[(y'_i)^2 + (z'_i)^2], \\
I_{y'} &= \mathbf{j}'\hat{I}\mathbf{j}' = \sum_i m_i[(z'_i)^2 + (x'_i)^2], \\
I_{z'} &= \mathbf{k}'\hat{I}\mathbf{k}' = \sum_i m_i[(x'_i)^2 + (y'_i)^2], \\
D_{x'y'} &= \mathbf{i}'\hat{I}\mathbf{j}' = \sum_i m_i x'_i y'_i = D_{y'x'}, \qquad (16)\\
D_{y'z'} &= \mathbf{j}'\hat{I}\mathbf{k}' = \sum_i m_i y'_i z'_i = D_{z'y'}, \\
D_{z'x'} &= \mathbf{k}'\hat{I}\mathbf{i}' = \sum_i m_i z'_i x'_i = D_{x'z'}. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Tensor $\hat{I}$ nazywa sią tensorem momentu bezwładności, jego diagonalne elementy są momentami bezwładności względem kolejnych osi, a niediagonalne - znane są jako momenty dewiacji.

Widać, że w ogólności kierunki wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i momentu pędu $\hat{I}\vec{\omega}$ są różne. Równość kierunków zachodzi, gdy $\hat{I}\vec{\omega} = I_\omega\vec{\omega}$, czyli wektor

$\vec{\omega}$ jest wektorem własnym tensora momentu bezwładności; $I_\omega$ jest momentem bezwładności względem kierunku prędkości kątowej $I_\omega = \frac{\vec{\omega}}{\omega}\hat{I}\frac{\vec{\omega}}{\omega}$.

Wektor własny macierzy $I_{jk}$ nazywa się kierunkiem głównym tensora. Wiadomo, że macierz symetryczna ma trzy ortogonalne wektory własne; jeśli nie ma degenercji, kierunki główne muszą być ortogonalne; jeśli jest degeneracja, można je wybrać tak, aby były ortogonalne.

Układ $U'$ można obrócić. Niech nowe wektory jednostkowe będą $\mathbf{f}'_j = \sum_k U_{jk}\mathbf{e}'_k$. Ponieważ nowa baza też jest ortonormalna, tzn. $\mathbf{f}'_j\mathbf{f}'_k = \delta_{jk}$, macierz $U$ musi być ortogonalna, tzn. $UU^T = I$ oraz $\mathbf{e}'_j = \sum_s U_{sj}\mathbf{f}'_s$.

Tensor momentu bezwładności po zmianie bazy zmienia się

$$I_{jk} = \mathbf{e}'_j\hat{I}\mathbf{e}'_k \to \hat{I}'_{jk} = \mathbf{f}'_j\hat{I}\mathbf{f}'_k = \sum_m U_{jm}\mathbf{e}'_m\hat{I}\sum_s U_{js}\mathbf{e}'_s = \sum_{ms} U_{jm}I_{ms}U^T_{sm} \tag{18}$$

W bazie, w której wektory bazowe mają kierunki osi głównych, tensor bezwładności jest macierzą diagonalną, z momentami bezwładności względem osi głównych na głównej przekątnej.

Jeśli początek $O'$ układu $U'$ wybierzemy w środku masy $S$, to moment pędu ma postać ($\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}_S$)

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{tr} + \mathbf{J}_{rot} = M\mathbf{R}\times\mathbf{v}_S + \hat{I}^s\vec{\omega}. \tag{19}$$

Dla ruchu postępowego prędkość kątowa jest równa zero i moment pędu ma tylko część translacyjną. Odwrotnie, dla ruchu obrotowego $\mathbf{v}_{tr} = 0$ i pozostaje moment pędu związany z rotacją $\mathbf{J}^S = \hat{I}^s\vec{\omega}$.

Z relacji $I_e = \mathbf{e}\hat{I}\mathbf{e}$ wynika równanie dla $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{I_e}}\mathbf{e}$

$$\mathbf{a}\hat{I}\mathbf{a} = 1. \tag{20}$$

W szczególności w układzie osi głównych

$$I_{x'}a^2_{x'} + I_{y'}a^2_{y'} + I_{z'}a^2_{z'} = 1. \tag{21}$$

Można rozpoznać równanie elipsoidy. Elipsoidę tę otrzymuje się wyprowadzając z ustalonego punktu, najczęściej $O'$, odcinki o długości $\frac{1}{\sqrt{I_e}}$ w kierunku $\mathbf{e}$.

Dla momentu bezwładności względem osi $\mathbf{e}$ obowiązuje twierdzenie Steinera. Punkt $\mathbf{r}'_i = \mathbf{R}' + \mathbf{r}^S_i$, gdzie $\mathbf{R}'$ jest położeniem środka masy w układzie $U'$, a $\mathbf{r}^S_i$ jest położeniem punktu względem środka masy. Można napisać

$$\begin{aligned} &I_e = \sum m_i[(\mathbf{R}' + \mathbf{r}^S_i)^2 - \{\mathbf{e}(\mathbf{R}' + \mathbf{r}^S_i)\}^2] = \\ &\sum_i m_i[(R')^2 - (\mathbf{e}\mathbf{R}')^2] + \sum_i m_i[(r^S_i)^2 - (\mathbf{e}\mathbf{r}^S_i)^2] = M(R'_\perp)^2 + I^S. \end{aligned} \tag{22}$$

Moment bezwładności względem osi **e** jest więc równy sumie momentu bezwładności względem osi równoległej do **e** i przechodzącej przez środek masy oraz wielkości $M(R'_\perp)^2$, gdzie $R'_\perp$ jest odległością środka masy od pierwszej osi.

## 1.2 Energia kinetyczna bryły sztywnej

Energia kinetyczna bryły sztywnej jest sumą energii kinetycznych mas wchodzących w jej skład.

$$\begin{aligned}
&T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\mathbf{v}_{tr} + \vec{\omega}\times\mathbf{r}'_i)^2 = \frac{1}{2}Mv_{tr}^2 + M\mathbf{v}_{tr}(\vec{\omega}\times\mathbf{R}') + \\
&\frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}\times\mathbf{r}'_i)(\vec{\omega}\times\mathbf{r}'_i) = \\
&\frac{1}{2}Mv_{tr}^2 + M\mathbf{v}_{tr}(\vec{\omega}\times\mathbf{R}') + \frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{\omega}[\mathbf{r}'_i\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}'_i)] = \\
&\frac{1}{2}Mv_{tr}^2 + M\mathbf{v}_{tr}(\vec{\omega}\times\mathbf{R}') + \frac{1}{2}\vec{\omega}\hat{I}\vec{\omega}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Ostatni składnik można napisać jako $\frac{1}{2}I_\omega\omega^2$.

Jeśli początek $O'$ układu $U'$ zaczepić w środku masy $S$, to $\mathbf{R}' = 0$ i energia kinetyczna jest sumą energii kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej ruchu obrotowego. Jeśli mamy do czynienia tylko z ruchem obrotowym, to moment pędu $\mathbf{J} = \hat{I}\vec{\omega}$ i wtedy $T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\mathbf{J}$.

Jeśli osie układu $U'$ są osiami głównymi tensora bezwładności, to

$$\hat{I}\vec{\omega} = \mathbf{i}'I_{x'}\omega_{x'} + \mathbf{j}'I_{y'}\omega_{y'} + \mathbf{k}'I_{z'}\omega_{z'}, \tag{24}$$

a

$$T = \frac{1}{2}[I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2]. \tag{25}$$

## 1.3 Równania ruchu

Punktem wyjścia są relacje już dyskutowane. Dla każdego punktu materialnego wchodzącego w skład bryły sztywnej słuszne jest równanie Newtona z siłami reakcji w układzie inercjalnym

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ri}. \tag{26}$$

Po wysumowaniu po $i$ otrzymujemy równanie ruchu dla środka masy

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_R, \tag{27}$$

gdzie $M$ jest masą bryły, $\mathbf{R}$ - położeniem środka masy, $\mathbf{F}$ - wypadkową sił działających, a $\mathbf{F}_R$ - wypadkową sił reakcji; wypadkowa sił reakcji nadających spójność bryle jest równa zero, ponieważ spełniają trzecią zasadę dynamiki (są także centralne).

Jeśli początek układu $U'$ związanego z bryłą przyjąć w środku masy, to moment pędu ma postać

$$\mathbf{J} = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \hat{I}^S\vec{\omega} \equiv M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{J}^S \tag{28}$$

($\mathbf{v}_s \equiv \mathbf{v}_{tr} = \dot{\mathbf{R}}$).

Dla wypadkowego momentu pędu zachodzi znana już relacja

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{D} + \mathbf{D}_R, \tag{29}$$

gdzie oddzielono moment sił reakcji $\mathbf{D}_R$ działających na bryłę jako całość. Moment sił można wyrazić przez moment sił względem środka masy

$$\mathbf{D} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i0} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i^S) \times \mathbf{F}_{i0} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{D}^S. \tag{30}$$

Tak samo można napisać dla sił reakcji

$$\mathbf{D}_R = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{iR} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i^S) \times \mathbf{F}_{iR} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_R + \mathbf{D}_R^S. \tag{31}$$

Otrzymuje się więc równanie ruchu

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{J}^S) = \mathbf{D} + \mathbf{D}_R = \mathbf{R} \times (\mathbf{F} + \mathbf{F}_R) + \mathbf{D}^S + \mathbf{D}_R^S. \tag{32}$$

Ale

$$\frac{d}{dt} M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = M\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times (\mathbf{F} + \mathbf{F}_R). \tag{33}$$

Spełnione jest zatem równanie

$$\frac{d\mathbf{J}^S}{dt} = \mathbf{D}^S + \mathbf{D}_R^S. \tag{34}$$

Posumowując, należy stwierdzić, że spełnione są równania ruchu

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_R, \tag{35}$$

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{D} + \mathbf{D}_R \;\; lub \;\; \frac{d\mathbf{J}^S}{dt} = \mathbf{D}^S + \mathbf{D}^S_R. \tag{36}$$

Równanie dla momentu pędu względem środka masy ma taką samą postać, jak w układzie inercjalnym $U$. Różniczkowanie względem czasu odbywa się w układzie $U$; stąd często warto wyrazić pochodną w $U$ przez pochodną w układzie $U'$, w którym bryła spoczywa i tensor $\hat{I}$ nie zależy od czasu

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d'\mathbf{J}}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}. \tag{37}$$

Kluczowe jest spostrzeżenie, że podany wyżej układ równań, uzupełniony o równania więzów, w sposób kompletny opisuje ruch bryły sztywnej. Ponieważ położenie bryły jest jednoznacznie wyznaczone przez 6 współrzędnych, siły i momenty sił mogą zależeć tylko od nich (też ich pochodnych). Jeśli nie ma więzów, mamy 6 równań i 6 niewiadomych (np. 3 współrzędne środka masy i 3 kąty Eulera). Jeśli obowiązuje dodatkowo $p$ równań więzów, dochodzą te równania i tyle samo współczynników Lagrange'a. Można też wprowadzić współrzędne uogólnione i zastosować równania Lagrange'a II rodzaju.

Różne układy sił o tej samej sile wypadkowej i tym samym momencie sił dają ten sam efekt. Punkty zaczepienia sił można przesuwać wzdłuż linii ich działania, bo nie zmienia to ich wypadkowej ani wypadkowego momentu sił; to ostatnie wynika tego, że $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = (\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i) \times \mathbf{F}_i$, gdzie $\mathbf{a}_i$ jest równoległy to $\mathbf{F}_i$.

Warunek konieczny i dostateczny równowagi bryły sztywnej sprowadza się do żądania

$$\begin{aligned} &\mathbf{F} + \mathbf{F}_R = 0, \\ &\mathbf{D} + \mathbf{D}_R = 0 \;\; lub \;\; \mathbf{D}^S + \mathbf{D}^S_R = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Konieczność wynika z równań ruchu, w których położnono $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ i $\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0$ lub $\frac{d\mathbf{J}^S}{dt} = 0$, a dostateczność - z jednoznaczności rozwiązań przy warunkach początkowych, określających spoczynek w ustalonej chwili.

## 1.4 Ruch płaski bryły sztywnej

W ruchu płaskim każdy punkt porusza się w płaszczyźnie, równoległej do pewnej stałej płaszczyzny w układzie. Chwilowa oś obrotu jest cały czas prostopadła do tej płaszczyzny, przez co moment bezładności względem tej osi jest stały

$$\frac{\vec{\omega}}{\omega}\hat{I}\frac{\vec{\omega}}{\omega} = I_\omega = const. \tag{39}$$

Prędkość kątowa może zmieniać tylko swoją wartość, którą można traktować jako pochodną pewnego kąta

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\frac{\vec{\omega}}{\omega}. \tag{40}$$

Równanie w układzie środka masy

$$\frac{d\mathbf{J}^S}{dt} = \mathbf{D}^S + \mathbf{D}_R^S \tag{41}$$

można pomnożyć przez wektor jednostkowy w kierunku $\vec{\omega}$

$$\frac{\vec{\omega}}{\omega}\hat{I}^S\ddot{\alpha}\frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}(\mathbf{D}^S + \mathbf{D}_R^S), \tag{42}$$

lub po prostu

$$I_\omega\ddot{\alpha} = D_\omega + D_{R\omega}, \tag{43}$$

gdzie po prawej stronie występują rzutu momentów siły działającej i siły reakcji na kierunek $\vec{\omega}$.

Szczególnym przypadkiem jest ruch bryły sztywnej wokół osi łączącej jego dwa unieruchomione punkty $P_1$ i $P_2$.

Siły reakcji mogą być traktowane jako działające w tych punktach, wynoszą one odpowiednio $\mathbf{F}_{R1}$ i $\mathbf{F}_{R2}$; są one prostopadłe do osi obrotu. Jeśli początek układu umieścimy w $P_1$ to moment sił wynosi $\overrightarrow{P_2P_1}\times\mathbf{F}_{R2}$, jest więc prostopadły do osi obrotu i $D_{R\omega} = 0$. Opłaca się zatem umieścić początek $O$ układu $U$ nie w środku masy lecz w punkcie na osi obrotu. Wobec $\mathbf{r}_0 = 0$ i $\mathbf{v}_{tr} = 0$ moment pędu $\mathbf{J} = \hat{I}\vec{\omega} = I_\omega\dot{\alpha}\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ i równanie ruchu ma postać

$$I_\omega\ddot{\alpha} = D_\omega. \tag{44}$$

## 1.5 Ruch wokół punktu

Rozważmy dwa przykłady, w których moment sił reakcji jest równy zero.

1. Niech oś obrotu przechodzi przez jeden punkt spoczywający w układzie inercjalnym i niech będzie on początkiem $O'$ układu $U'$. Siła rekacji jest przyłożona właśnie w $O'$, stąd $\mathbf{D}_R = 0$. Jak już wspomniano, wygodnie jest tak napisać równania ruchu, aby różniczkowanie względem czasu odbywało się w układzie $U'$ związanym z bryłą. W tym układzie moment bezwładności nie zależy od czasu. Równania ruchu mają więc postać

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d(\hat{I}\vec{\omega})}{dt} = \frac{d'\hat{I}\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \hat{I}\vec{\omega} = \hat{I}\frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \hat{I}\vec{\omega} = \hat{I}\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \hat{I}\vec{\omega} = \mathbf{D}, \tag{45}$$

gdzie wykorzystano związek między pochodną wektora w $U$ i w $U'$, stałość tensora $\hat{I}$ w $U'$ i fakt, że $\frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Niech osiami $U'$ są osie główne tensora $\hat{I}$. Wtedy tensor jest dany macierzą diagonalną. Składowe wektora $\hat{I}\vec{\omega}$ w $U'$ są $(I_{x'}\omega_{x'}, I_{y'}\omega_{y'}, I_{z'}\omega_{z'})$. Po obliczeniu iloczynu wektorowego równania ruchu przyjmują postać zwaną układem równań Eulera

$$\begin{aligned} I_{x'}\dot{\omega}_{x'} &= (I_{y'} - I_{z'})\omega_{y'}\omega_{z'} + D_{x'}, \\ I_{y'}\dot{\omega}_{y'} &= (I_{z'} - I_{x'})\omega_{z'}\omega_{x'} + D_{y'}, \\ I_{z'}\dot{\omega}_{z'} &= (I_{x'} - I_{y'})\omega_{x'}\omega_{y'} + D_{z'}. \end{aligned} \tag{46}$$

2. Niech bryła sztywna jest swobodna, czyli nie ma sił reakcji, a początek $O'$ układu $U'$ znajduje się w środku masy $S$. Równania ruchu mają postać taką samą jak podane wyżej, tzn.

$$\frac{d\mathbf{J^S}}{dt} = \hat{I}^S\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \hat{I}^S\vec{\omega} = \mathbf{D^S}. \tag{47}$$

Równania Eulera mają identyczną postać, z tym że $\hat{I} \to \hat{I}^S$.