Andrzej Raczyński

Mechanika klasyczna cz.10a

1 Elementy szczególnej teorii względności- uzupełnienie

Celem jest zapisanie równań Maxwella, tak aby użyć czterowektorów i ich tensorowych uogólnień w celu wykazania niezmienniczości teorii przy zmianie układu inercjalnego, i podanie reguł transformacji pól.

Jak już pokazano, wektor kontrawariantny i kowariantny transformują się według wzorów

$$x^{\mu\prime} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad x_{\mu}{}' = a_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu}. \tag{1}$$

Transformacja odwrotna ma postać (dla wektora kontrawariantnego)

$$a_{\mu}{}^{\rho} x^{\mu\prime} = a_{\mu}{}^{\rho} a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \delta^{\rho}_{\nu} x^{\nu} = x^{\rho}. \tag{2}$$

Pochodna względem współrzędnej wektora kontrawariantnego transformuje się następująco

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu\prime}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} = a_{\mu}{}^{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}, \tag{3}$$

a więc jak wektor kowariantny. Podobnie, pochodna względem współrzędnej wektora kowariantnego transformuje się jak wektor kontrawariantny.

Równania Maxwella w próżni mają postać

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}),\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\
\nabla \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho,\\
\nabla \mathbf{B} &= 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{j}$ jest gęstością prądu, ρ - gęstością ładunku, ϵ_0 - stałą dielektryczną próżni, a μ_0 - przenikalnością magnetyczną próżni; $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$.

Natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}$ i indukcję magnetyczną $\mathbf{B}$ można wyrazić przez potencjał skalarny ϕ i wektorowy $\mathbf{A}$, tak że

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5}$$

Buduje się czterowektor potencjału

$$A^0 = \frac{\phi}{c}, \quad A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z \tag{6}$$

oraz czterowektor prądu

$$j^0 = c\rho, \quad j^1 = j_x, \quad j^2 = j_y, \quad j^3 = j_z. \tag{7}$$

Buduje się także antysymetryczny tensor pola elektromagnetycznego

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}. \tag{8}$$

W szczególności

$$\begin{aligned} F^{01} &= \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\phi}{c}}{\partial x} = -\frac{1}{c}E_x, \\ F^{02} &= \frac{\partial A^2}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_2} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\phi}{c}}{\partial y} = -\frac{1}{c}E_y, \\ F^{03} &= \frac{\partial A^3}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\phi}{c}}{\partial z} = -\frac{1}{c}E_z, \\ F^{12} &= \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z, \\ F^{23} &= \frac{\partial A^3}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_3} = -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -B_x, \\ F^{31} &= \frac{\partial A^1}{\partial x_3} - \frac{\partial A^3}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} = -B_y, \end{aligned} \tag{9}$$

Tensor $F^{\mu\nu}$ ma więc postać

$$F^{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Dla tensora kowariantnego $F_{\mu\nu}$ składowe magnetyczne są takie, jak dla tensora kontrawariantnego, zaś składowe elektryczne zmieniają znak (bo obniżenie indeksu 0 nie zmienia znaku, a obniżenie indeksu 1,2,3 zmienia znak).

Definiuje się też antysymetryczny tensor dualny

$$f^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}, \tag{11}$$

gdzie tensor $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ jest zdefniowany tak, że dla parzystej permutacji indeksów (0123) element jest równy 1, dla nieparzystej jest równy -1, a jeśli dwa indeksy są identyczne, jest równy 0. Otrzymuje się

$$\begin{aligned}
f^{01} &= \frac{1}{2}(F_{23} - F_{32}) = -B_x, \\
f^{02} &= \frac{1}{2}(-F_{13} + F_{31}) = -B_y, \\
f^{03} &= \frac{1}{2}(F_{12} - F_{21}) = -B_z, \\
f^{12} &= \frac{1}{2}(-F_{30} + F_{03}) = \frac{1}{c}E_z, \\
f^{23} &= \frac{1}{2}(-F_{10} + F_{01}) = \frac{1}{c}E_x, \\
f^{31} &= \frac{1}{2}(F_{02} - F_{20}) = \frac{1}{c}E_y.
\end{aligned} \tag{12}$$

Równania Maxwella zapisać można jako

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} &= \mu_0 j^\nu, \\
\frac{\partial f^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Sprawdźmy

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F^{\mu 0}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^3} = \frac{\partial \frac{1}{c}E_x}{\partial x} + \frac{\partial \frac{1}{c}E_y}{\partial y} + \frac{\partial \frac{1}{c}E_z}{\partial z} = \\
&\quad \frac{1}{c}\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{c\epsilon_0}\rho = \frac{1}{c^2\epsilon_0}c\rho = \mu_0 j^0, \\
&\frac{\partial F^{\mu 1}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^3} = \frac{1}{c}\frac{\partial(-\frac{1}{c}E_x)}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial z} \\
&= \frac{-1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_x = \mu_0 j_x = \mu_0 j^1
\end{aligned} \tag{14}$$

i analogicznie dla składowych 2 i 3.

Dla tensora dualnego otrzymujemy

$$\frac{\partial f^{\mu 0}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial f^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial f^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial f^{30}}{\partial x^3} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \mathbf{B} = 0,$$
$$\frac{\partial f^{\mu 1}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial f^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial f^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial f^{31}}{\partial x^3} = \frac{1}{c}\frac{\partial(-B_x)}{\partial t} + \frac{\partial \frac{-1}{c}E_z}{\partial y} + \frac{\partial \frac{1}{c}E_y}{\partial z} =$$
$$\frac{1}{c}[-\frac{\partial B_x}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{E})_x] = 0 \tag{15}$$

i analogicznie dla składowych 2 i 3.

Zapis równań Maxwella z użyciem czterowektorów i czterotensorów, tzw. kowariantna postać równań Maxwella, oznacza, że po przejściu do innego układu inercjalnego obowiązują równania w tej samej postaci lecz z użyciem obiektów primowanych. Teoria jest więc słuszna we wszystkich układach inercjalnych.

Po zmianie układu tensor pola ma postać

$$F^{\mu\nu\prime} = \frac{\partial A^{\nu\prime}}{{x_\mu}'} - \frac{\partial A^{\mu\prime}}{{x_\nu}'} = a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta \frac{\partial A^\beta}{\partial x_\alpha} - a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\beta} = a^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta} a^\nu{}_\beta. \tag{16}$$

Zatem w przypadku ruchu układu U' z prędkością V w kierunku osi x otrzymamy ($\tanh\omega = \frac{V}{c}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E'_x & -\frac{1}{c}E'_y & -\frac{1}{c}E'_z \\ \frac{1}{c}E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ \frac{1}{c}E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ \frac{1}{c}E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \tag{17}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po wykonaniu mnożenia otrzymuje się

$$E'_x = E_x,$$
$$E'_y = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$
\begin{aligned}
E'_z &= \frac{E_z + V B_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\
B'_x &= B_x, \\
B'_y &= \frac{B_y + \frac{V}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\
B'_z &= \frac{B_z - \frac{V}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$