Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.10

1 Elementy szczególnej teorii względności

Szczególna teoria względności jest teorią czasu i przestrzeni, będącą uogólnieniem teorii Galileusza. Musi być stosowana między innymi do opisu zjawisk mechanicznych, gdy prędkości są porównywalne z prędkością światła, lub do zjawisk elektromagnetycznych. W tym wykładzie omawiane będą tylko wybrane zagadnienia, analogiczne do niektórych dyskutowanych w teorii nierelatywistycznej. Podstawową różnicą jest potraktowanie czterowymiarowej czasoprzestrzeni całościowo, bez wydzielania osobno czasu i osobno przestrzeni, jak w przypadku czasoprzestrzeni Galileusza, i wprowadzenie w niej nowej struktury geometrycznej.

U podstaw leżą dwa założenia:
1. jednorodność i izotropowość czasoprzestrzeni, tzn. brak wyróżnionych punktów i kierunków;
2. niezależność prędkości światła od ruchu źródła światła lub obserwatora. Jest to postulat niezgodny z fizyką Newtona - Galileusza i sprzeczny z naszą codzienną intuicją: według niej prędkości światła, źródła i obserwatora powinny się dodawać wektorowo. Niezmienność prędkości światła jest potwierdzona bezpośrednio i pośrednio w licznych doświadczeniach, choć nie jest pewne, czy Einstein znał wyniki ówczesnych doświadczeń, np. doświadczenia Michelsona.

Niech układ inercjalny U' przesuwa się ze stałą prędkością $\mathbf{V}$ względem układu inercjalnego U. Osie układów są równoległe, a prędkość skierowana wzdłuż osi x. Zdarzenie, np. nieskończenie krótki błysk zachodzący w nieskończenie małym obszarze przestrzeni, ma w jednym układzie współrzędne (t, x, y, z), a w drugim $(t', x,' y,' z')$. Początki układów w chwili $t = 0$ pokrywają się. Czas przestał być absolutny, jakim był przy transformacji Galileusza.

Transformacja prowadząca od zmiennych w układzie U do zmiennych w U' musi być liniowa; gdyby zależała od współrzędnych zdarzenia, byłoby to sprzeczne z postulatem jednorodności przestrzeni. Można tak obrócić układ, aby oś y przechodziła w oś y', a oś z w z'. Aby obserwator w U mierzący linijkę umieszczoną w U' otrzymał taki sam wynik, jak obserwator w U' mierzący taką samą linijkę umieszczoną w U, musi być $y = y'$ i $z = z'$ (por.kontrakcję długości niżej).

Związek między współrzędnymi x i t w obu układach musi być postaci

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \equiv \Gamma(x + \alpha t) \\ t' &= Cx + Dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Początek U', tzn. punkt $x' = 0$ w chwili t ma wspoółrzędną $x = Vt$. Stąd $\alpha = -V$. Współczynnik Γ może zależeć od wartości bezwzględnej prędkości. Relacja odwrotna powinna być

$$x = \Gamma(x' + Vt'), \tag{2}$$

gdzie zmieniono role wielkości primowanych i nieprimowanych oraz znak prędkości. Γ w obu transformacjach powinna być taka sama; inaczej długość linijki umieszczonej w U', a mierzona w U byłaby inna niż długość tej samej linijki umieszczonej w U, a mierzonej w U' (por. kontrakcję długości niżej).

Jeśli w chwili $t = t' = 0$ wysłano sygnał świetlny, to w układzie U dotrze on po czasie t do punktu $x = ct$, a w układzie U' po czasie t' do punktu ct'. Spełnione są więc relacje

$$\begin{aligned} ct' &= \Gamma(ct - Vt), \\ ct &= \Gamma(ct' + Vt'). \end{aligned} \tag{3}$$

Mnożąc je stronami i przekształcając otrzymuje się

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4}$$

Transformacja składowych x i x' ma więc postać

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Biorąc x' z pierwszej relacji i wstawiając do drugiej otrzymuje się

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{6}$$

Wyniki można zestawić

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{7}$$

Transformacja ta, zwana transformacja Lorentza (w węższym sensie) jest uogólnieniem transformacji Galileusza; sprowadza się do tej ostatniej w granicy $\frac{V}{c} \to \infty$. Transformację odwrotną otrzymuje się zamieniając rolami współrzędne primowane i nieprimowane oraz zmieniając znak prędkości V.

Jeśli kierunek prędkości $\mathbf{V}$ jest dowolny, należy wektor położenia rozłożyć na składowe: równoległą i prostopadłą do prędkości; składowa prostopadła się nie zmienia, natomiast składowa równoległa transformuje się analogicznie, do tego, co pokazano wyżej

$$\begin{aligned} &\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp}, \quad \mathbf{r}_{||} = \mathbf{V}\frac{\mathbf{rV}}{V^2}, \\ &\mathbf{r'}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \\ &\mathbf{r'}_{||} = \frac{\mathbf{r}_{||} - \mathbf{V}t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ &t' = \frac{t - \frac{\mathbf{r}_{||}\mathbf{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{8}$$

(Uwaga: $\mathbf{r}_{||}\mathbf{V} = \mathbf{rV}$).

Przy prędkości równoległej do osi x transformację można napisać wprowadzając funkcje hiperboliczne: $\tanh\omega = \frac{V}{c}$, $\cosh\omega = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, $\sinh\omega = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ oraz wprowadzając nowe oznaczenia $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = ct$

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= \cosh\omega x^0 - \sinh\omega x^1, \\ x^{1\prime} &= -\sinh\omega x^0 + \cosh\omega x^1, \\ x^{2\prime} &= x^2, \\ x^{3\prime} &= x^3. \end{aligned} \tag{9}$$

Jest to pseudoobrót w płaszczyźnie $(x^0 x^1)$.

1.1 Czterowektory i przestrzeń Minkowskiego

Wektor x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, nazywamy wektorem kontrawariantnym.Tensor metryczny jest zdefinowany jako

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Wektor kowariantny x_ν jest zdefiniowany jako

$$x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu, \tag{11}$$

gdzie rozumie się milcząco sumowanie po podwójnie powtarzającym się wskaźniku.

Forma

$$s^2 = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{12}$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorentza. Jest to pseudodługość czterowektora ("pseudo", ponieważ nie musi być nieujemna). Wektor o długości dodatniej nazywa się czasopodobnym, o długości ujemnej - przestrzennopodobnym, o długości zerowej - światłopodobnym. Wektor światłopodobny może być połączony sygnałem świetlnym z początkiem układu. Zdarzenie w punkcie czasopodobnym może być w związku przyczynowym ze zdarzeniem w początku układu, zdarzenie w punkcie przestrzennopodobnym nie może być w takim związku, bo różnica czasów jest zbyt mała, aby sygnał dotarł do tego punktu nie przkraczając prędkości światła.

Transformacją Lorentza w ogólnym sensie jest linowa transformacja zachowująca niezmiennik s^2. Obejmuje ona trzy zwykłe obroty w płaszczyznach

(x^1x^2), (x^2x^3), (x^3, x^1), trzy pseudoobroty w płaszczyznach (x^0x^1), (x^0x^2), (x^0x^3), odbicia przestrzenne i czasowe oraz złożenia wyżej wymienionych transformacji. Jeśli napisać transformację Lorentza jako

$$x^{\nu\prime} = a^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu}, \tag{13}$$

to żądanie $x^{\nu\prime}x_{\nu}{}' = x^{\mu}x_{\mu}$, implikuje warunek na transformację Lorentza

$$a^{\mu}{}_{\nu} a_{\mu}{}^{\rho} = \delta^{\rho}_{\nu}, \tag{14}$$

gdzie po prawej stronie stoi delta Kroneckera.

Przstrzeń linowa czterowektorów, w której zdefinowano iloczyn pseudoskalarny $xy = x^{\mu}y_{\mu}$ nosi nazwę przestrzeni Minkowskiego.

1.2 Kontrakcja długości

Długość ciała poruszjące się okazuje się zmniejszona w porównaniu z długością ciała spoczywającego.

Przy pomiarze wykonanym w układzie U musimy w tej samej chwili t odczytać położenie początku i końca ciała spoczywającego w układzie U'. Mamy

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ x_2' &= \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Po odjęciu otrzymujemy $x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, czyli zmierzona długość ciała w układzie U wynosząca $x_2 - x_1$ jest zmniejszona od długości $x_2' - x_1'$ ciała w układzie U', w którym ciało spoczywa.

Niesłuszne są spotykane w niektórych artykułach uwagi o rzekomej deformacji ciał w ruchu. Prawdą jest, że rozmiary w kierunku ruchu są skrócone, a rozmiary poprzeczne do kierunku ruchu pozostają niezmienione. Jednak należy uwzględnić, że do oka wpadają równocześnie sygnały świetlne wysłane później z powierzchni ciała bliższej obserwatorowi i sygnały wysłane wcześniej w powierzchni dalszej od obserwatora. Skutek jest taki, że widzimy ciało obrócone, lecz nie zdeformowane.

1.3 Dylatacja czasu i czas własny

Niech w początku $x' = 0$ układu U' poruszającego się względem U nastąpią błyski w chwilach t'_1 i t'_2. W układzie U te chwile to

$$t_1 = \frac{t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$
$$t_2 = \frac{t'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{16}$$

Po odjęciu tych relacji widać, że interwał $\tau = t_2 - t_1$ zmierzony w U jest równy interwałowi $\tau' = t'_2 - t'_1$ podzielonemu przez liczbę mniejszą od 1; jest zatem dłuższy niż w U'.

Czas mierzony w układzie U' jest dla ciał związanych z tym układem czasem własnym τ. Odstęp czasu własnego między zdarzeniami jest mniejszy niż odstęp czasu między tymi zdarzeniami mierzony w innym inercjalnym układzie.

Czas własny można wprowadzić także dla ciał poruszających się ruchem niejednostajnym. W każdej chwili można przejść do układu, w którym ciało chwilowo spoczywa. Można napisać relację różniczkową

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt \tag{17}$$

lub w postaci całkowej

$$\tau - \tau_0 = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{V(t)^2}{c^2}} dt. \tag{18}$$

τ jest czasem własnym, całka po prawej stronie to suma czasów mierzonych przez zegary z inercjalnych układów odniesienia stowarzyszonych chwilowo z ciałem.

1.4 Dodawanie prędkości

Niech ciało porusza się w kierunku osi x (i x'). Prędkość ciała w układzie U to $v_x = \frac{dx}{dt}$, a w układzie U' to $v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}$. Podstawiając wzory transformacyjne otrzymujemy

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V dx'}{c^2}} = \frac{v'_{x'} + V}{1 + \frac{V v'_{x'}}{c^2}}. \tag{19}$$

W szczególności dla $v'_{x'} = c$ otrzymuje się $v_x = c$, zgodnie z postulatem teorii. Badając wyrażenie $1 - \frac{v_x^2}{c^2}$ i zauważając, że jest ono nieujemne, można zauważyć że dodając dwie dowolne prędkości, nie dostanie się wartości większej niż c.

Dla ruchu w kierunku prostopadłym do osi x transformacja jest inna. Otrzymuje się

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\frac{dt' + \frac{V dx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}} = \frac{v_{y'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V v'_{x'}}{c^2}}. \tag{20}$$

W ogólnym przypadku prędkość ciała należy rozłożyć na składowe: równoległą i prostopadłą do prędkości układu i zastosować dla nich wzory transformacyjne podane wyżej.

1.5 Efekt Dopplera i aberracja

Efekt Dopplera polega na zmianie częstości w związku z ruchem źródła światła lub obserwatora. Aberracja polega na zmianie kierunku, z którego nadchodzi sygnał.

Fala monochromatyczna zmienia się w czasie i przestrzeni jak $\cos(\omega t - \mathbf{kr})$, gdzie wektor falowy $\mathbf{k}$ o długości $k = \frac{\omega}{c}$ określa kierunek rozchodzenia się fali. Faza $\omega t - \mathbf{kr}$ jest skalarem; nie zmienia się przy zmianie układu. To pozwala zbudować czterowektor $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z)$, którego składowe transformują się jak składowe wektora x^μ.

Załóżmy, że obserwator w układzie U' (np. Ziemia) porusza się z prędkością V skierowaną wzdłuż osi x' względem U (gwiazda) . Składowe czterowektora k^μ transformują się

$$\begin{aligned} k'_{x'} &= \frac{k_x - \frac{V}{c}\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ k'_{y'} &= k_y, \end{aligned} \tag{21}$$

$$k'_{z'} = k_z,$$
$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}k_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Niech układy są tak zorientowane, że $k_y = 0$. Niech kąt θ określa kierunek z którego przychodzi sygnał, tzn. $k_x = k\cos\theta$, $k_z = k\sin\theta$, $k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$ oraz $k'_{x'} = k'\cos\theta'$, $k'_{z'} = k'\sin\theta'$, $k' = |\mathbf{k}'| = \frac{\omega'}{c}$. Wtedy otrzymujemy

$$\omega' = \omega\frac{1-\frac{V}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{22}$$

oraz

$$\frac{\omega'}{c}\cos\theta' = \frac{\frac{\omega}{c}\cos\theta - \frac{V}{c}\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{23}$$

czyli

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta}. \tag{24}$$

Przy prędkości Ziemi w ruchu obiegowym rzędu 30 km/s, zmiana kąta widzenia gwiazd jest rzędu 20 sekund łuku.

1.6 Równania ruchu

Ponieważ czas własny jest niezmiennikiem, należy go użyć do parametryzowania ruchu. Zdefiniujmy czterowektor prędkości $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Ciało spoczywa w U' a $\mathbf{v}$ jest prędkością ciała w U i jest tożsama z prędkością układu $\mathbf{V}$. W szczególności

$$\begin{aligned}
u^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\
u^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\
u^2 &= \frac{dx^2}{d\tau} = \frac{dy}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},
\end{aligned} \tag{25}$$

$$u^3 = \frac{dx^3}{d\tau} = \frac{dz}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{26}$$

Zachodzi $u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = c^2$.

Czterowektor pędu definiujemy jako $p^\mu = mu^\mu$, gdzie m jest masą spoczynkową ciała (niezmienniczą).

Uogólniając tradycyjne równania Newtona postulujemy je w relatywistycznej postaci

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu, \tag{27}$$

gdzie $\mathcal{F}^\mu$ jest czterowektorem siły. Zapisanie prawa ruchu z użyciem czterowektorów, które transformują się w znany sposób przy transformacji Lorentza, gwarantuje, że to prawo ruchu obowiązuje we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Dla składowych $j = 1, 2, 3$, czyli (x, y, z) oznacza to

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= \mathcal{F}^1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = F_x,\\
\frac{d}{dt}\frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= \mathcal{F}^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = F_y,\\
\frac{d}{dt}\frac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= \mathcal{F}^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = F_z,
\end{aligned} \tag{28}$$

albo

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_j}{dt} = F_j, \quad p_j = \frac{mv_j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\
&\mathcal{F}^1 = \frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \mathcal{F}^2 = \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \mathcal{F}^3 = \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},
\end{aligned} \tag{29}$$

gdzie F_j jest składową j siły, jak w przypadku nierelatywistycznym; jak widać, trzy składowe $\mathcal{F}^{1,2,3}$ czterowektora siły różnią się od składowych $F_{x,y,z}$ o czynnik równy $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Zachowana jest więc postać z drugiej zasady dynamiki, z tym, że definicja pędu uległa modyfikacji.

Równanie dla składowej zerowej można zinterpretować następująco. Równanie ruchu pomnożmy przez u_μ (co znaczy także sumowanie po μ), otrzymując

$$\mathcal{F}^\mu u_\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} u_\mu = m \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} u^\mu u_\mu = \frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} c^2 = 0. \tag{30}$$

Dalej

$$\mathcal{F}^0 u_0 = \mathcal{F}^0 \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathcal{F}^1 u^1 + \mathcal{F}^2 u^2 + \mathcal{F}^3 u^3 = \tag{31}$$

$$\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Stąd $\mathcal{F}^0 = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ i dalej

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32}$$

Stąd

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}\mathbf{v}. \tag{33}$$

Po prawej stronie występuje moc, wyrażenie pod pochodną z lewej strony oznacza więc energię

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{34}$$

Z relacji $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ można wyznaczyć $\mathbf{v}$ i wstawić do wzoru na energię, otrzymując

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{35}$$

Dla małych wartości $\frac{v}{c}$ można oba wyrażenia na energię rozwinąć w szereg

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + ..., \tag{36}$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} = mc^2(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} + ...$$

W tym przybliżeniu, obok energii spoczynkowej mc^2, otrzymujemy nierelatywistyczne wyrażenia na energię kinetyczną i poprawki wyższych rzędów.

1.7 Lagranżjan i hamiltonian

Równania ruchu mechaniki relatywistycznej dają się zapisać jako równania Lagrange'a i Hamiltona. Dla ciała w polu sił V lagranżjan ma postać

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - V. \tag{37}$$

Pęd uogólniony we współrzędnych kartezjańskich wynosi

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{mv_j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad j = x, y, z, \tag{38}$$

zgodnie definicją podaną w poprzednim podrozdziale. Równania Lagrange'a mają postać

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{d}{dt}\frac{mv_j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0, \tag{39}$$

jak uogólnione równania Newtona, tzn. z uwzględnieniem modyfikacji pędu.

Z relacji

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{40}$$

można wyliczyć prędkość $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c}{\sqrt{m^2c^2+\mathbf{p}^2}}. \tag{41}$$

Hamiltonian ma postać

$$H = \mathbf{pv} - L = \mathbf{p}\frac{\mathbf{p}c}{\sqrt{m^2c^2+\mathbf{p}^2}} + mc^2\sqrt{1-\frac{p^2}{m^2c^2+p^2}} + V = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4} + V \tag{42}$$

Powyższe związki ulegają modyfikacjom dla cząstki o ładunku Q w polu elektromagnetycznym. Istnieje wtedy potencjał uogólniony U, a lagranżjan ma postać

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - Q\phi + Q\mathbf{Av}, \tag{43}$$

gdzie Q jest ładunkiem cząstki, ϕ - potencjałem skalarnym, a $\mathbf{A}$ - potencjałem wektorowym. Pęd uogólniony wynosi

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{m v_j}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + Q A_j, \quad j = x, y, z. \tag{44}$$

Z relacji

$$\mathbf{p} - Q\mathbf{A} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{45}$$

można obliczyć prędkość $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})c}{\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}}, \tag{46}$$

a hamiltonian jest postaci

$$H = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \sqrt{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + Q\phi. \tag{47}$$