Andrzej Raczyński
Mechanika klasyczna cz.1

Opracowanie niniejsze obejmuje materiał wykładu, ćwiczeń i konwersatorium z mechaniki klasycznej, przewidziany na rok 2020/21. Podrozdziały przewidziane na konwersatorium oznaczone będą literą (K) przy tytule.

Wybrane podręczniki:

1. W. Rubinowicz, W. Królikowski, Mechanika teoretyczna, PWN, Warszawa, 1995 - podstawowy (obejmuje cały materiał poza mechaniką ośrodów ciągłych).

2. G. Białkowski, Mechanika klasyczna, PWN, Warszawa, 1975 - jak wyżej

3. L. D. Landau, J. M. Lifszyc, Mechanika, PWN, Warszawa, 2006.

4. I. I. Olchowski, Mechanika teoretyczna, PWN Warszawa 1978.

5. K Stefański, Wstęp do mechaniki klasycznej, PWN Warszawa, 1999 (obejmuje cały materiał poza mechaniką ośrodów ciągłych).

5. R. S. Ingarden, A. Jamiołkowski, Mechanika klasyczna, PWN Warszawa, Poznań, 1980 (matematycznie zaawansowany).

6. W. I. Arnold, Metody matematyczne mechaniki klasycznej, PWN, Warszawa, 1981 (matematycznie zaawansowany).

7. J. Bukowski, P. Kijkowski, Kurs mechaniki płynów, PWN, Warszawa, 1980.

8. B. Średniawa, J. Weyssenhoff, Mechanika środowisk rozciągłych, PWN Warszawa, Kraków, 1969 (podstawowy).

9. L. D. Landau E. M. Lifszyc, Hydrodynamika, PWN Warszawa, 1994 (bardzo obszerny, potrzebne będą początkowe fragmenty)

1 Mechanika punktu materialnego

Mechanika klasyczna opisuje ciała fizyczne w czterowymiarowej czasoprzestrzeni Galileusza; punkt w czasoprzestrzeni jest zdarzeniem. Zdarzenie opisane jest jedną współrzędną czasową t i trzema współrzędnymi przestrzennymi $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Dla dwóch zdarzeń równoczesnych określona jest ich odległość przestrzenna dana metryką przestrzeni euklidesowej $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Dla dwóch zdarzeń nierównoczesnych nie można określić ich odległości przestrzennej. Mówi się, że czas jest absolutny, lecz przestrzeń jest względna. W dawnej fizyce Arystotelesa przestrzeń była traktowana jako absolutna. W teorii względności czas traci absolutny charakter, a odległość między zdarzeniami (a raczej pseudoodległość) definiowana jest inaczej.

Punkt materialny jest modelem cząstki bez struktury wewnętrznej, o zaniedbywalnie małych (w granicy nieskończenie małych) rozmiarach. Opisuje się go podając jego masę (o czym niżej) oraz położenie dane przez wektor $\mathbf{r}$ w każdej chwili t. Niech dany jest kartezjański prawoskrętny układ współrzędnych o ortonormalnych wektorach jednostkowych $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, ($\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$, $\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ z cyklicznym przestawieniem). W kilku przypadkach stosowane będą oznaczenia $(\mathbf{e_1}.\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ zamiast $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i (x_1, x_2, x_3) zamiast (x, y, z). Czasem zamiast pogrubienia wektor będzie oznaczany strzałką.

Wektor $\mathbf{r}$ można rozłożyć jako

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{1}$$

co można zapisać krótko $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Długość wektora $\mathbf{r}$ wynosi $r = |\mathbf{r}|$.

Definiuje się prędkość i przyspieszenie jako pochodne względem czasu t

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = v_z\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}, \tag{2}$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = a_z\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$

Pochodna względem czasu często oznaczana będzie kropką nad symbolem wielkości różniczkowanej. Krzywa $\mathbf{r}(t) =$ jest torem (trajektorią) punktu materialnego.

Wprowadźmy element długości elementu trajektorii $ds = |d\mathbf{r}|$. Wektor jednostkowy $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ jest styczny do toru (uwaga na zbieżność tradycyjnych oznaczeń czasu t i wektora stycznego $\mathbf{t}$). Prędkość można zapisać jako

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{t}v, \tag{3}$$

jest więc styczna do toru.

Przyspieszenie zawiera zarówno składową styczną jak i prostopadłą (normalną) do toru

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{t}v = \mathbf{t}\frac{dv}{dt} + \frac{d\mathbf{t}}{dt}v = \mathbf{t}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{t}\frac{dv}{dt} + v^2\frac{d\mathbf{t}}{ds}. \tag{4}$$

Ponieważ $\mathbf{t}^2 = 1$, $\mathbf{t}d\mathbf{t} = 0$. Przyrost $d\mathbf{t}$ wektora $\mathbf{t}$ jest więc prostopadły do $\mathbf{t}$. Istnieje zatem jednostowy wektor $\mathbf{n}$ prostopadły do $\mathbf{t}$; oba wyznaczają płaszczyznę ściśle styczną do toru (istnieje jeszcze trzeci wektor jednostkowy, prostopadły do tych dwóch). Można więc napisać, że $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}$, gdzie $\frac{1}{\rho}$ jest tu współczynnikiem. Rozkład przyspieszenia przybiera więc postać

$$\mathbf{a} = \mathbf{t}\frac{dv}{dt} + v^2\frac{1}{\rho}\mathbf{n}, \tag{5}$$

gdzie składniki reprezentują odpowiednio składową styczną i normalną.

Aby zrozumieć sens współczynnika ρ rozważmy ruch po okręgu o promieniu r w płaszczyźnie (xy). Wektor jednostkowy $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ w kierunku wektora wodzącego $\mathbf{r}$ ma składowe $(\cos\phi, \sin\phi, 0)$, gdzie ϕ jest kątem obrotu liczonym od osi x. Wektor styczny do toru w kierunku dodatnich kątów ma postać $(-\sin\phi, \cos\phi, 0)$.

Pochodna $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ ma postać

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (-\cos\phi\frac{d\phi}{ds}, -\sin\phi\frac{d\phi}{ds}, 0) = -\frac{1}{r}\mathbf{n}, \tag{6}$$

gdzie skorzystano z relacji $ds = rd\phi$. Parametr ρ ma więc sens promienia krzywizny toru (z dokładnością do znaku), a samo przyspieszenie ma składową dośrodkową.

1.1 Zmiana układu odniesienia

Rozważmy dwa układy odniesienia: U o początku w punkcie O i U' o początku w O'. Wektor łączący Oi O' oznaczmy przez $\mathbf{r}_0$. Położenie punktu materialnego w poszczególnych układach dane jest wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$. Zachodzi

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}'. \tag{7}$$

Dowolny wektor $\mathbf{b}'$ można rozłożyć w bazie ortonarmalnej $\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}\mathbf{e_3'}$ jako

$$\mathbf{b}' = \sum_{k=1}^{3} b_k'\mathbf{e_k'}. \tag{8}$$

Różniczkowanie tego wektora względem czasu musi uwzględniać zmienność zarówno współrzędnych jak i wektorów jednostkowych

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}' = \sum_{k=1}^{3}\frac{db_k'}{dt}\mathbf{e_k'} + \sum_{k=1}^{3} b_k'\frac{d\mathbf{e_k'}}{dt}. \tag{9}$$

Pierwszą sumę oznaczymy jako $\frac{d'}{dt}\mathbf{b}' = \sum_{k=1}^{3} \frac{db'_k}{dt}\mathbf{e'_k}$. Aby zbadać wyrażenia w drugiej sumi, zróżniczkujmy relację ortonormalności wektorów $\mathbf{e'_k}$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e'_k}\mathbf{e'_s} = \frac{d}{dt}\delta_{ks} = 0 = \frac{d\mathbf{e'_k}}{dt}\mathbf{e'_s} + \mathbf{e'_k}\frac{d\mathbf{e'_s}}{dt}. \tag{10}$$

Pochodne wektorów jednostkowych można rozłożyć w ich bazie jako

$$\frac{d\mathbf{e'_i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\mathbf{e'_j}. \tag{11}$$

Zastosowanie tej relacji w poprzedniej daje, po skorzystaniu z ortonormalności wektorów $\mathbf{e'_j}$

$$\frac{d\mathbf{e'_k}}{dt}\mathbf{e'_s} + \mathbf{e'_k}\frac{d\mathbf{e'_s}}{dt} = \alpha_{ks} + \alpha_{sk} = 0. \tag{12}$$

Wynika stąd, że $\alpha_{jj} = 0$. Wprowadźmy oznaczenia $\alpha_{12} = -\alpha_{21} = \omega'_3$, $\alpha_{23} = -\alpha_{32} = \omega'_1$, $\alpha_{31} = -\alpha_{13} = \omega'_2$.

Przyczynek do pochodnej wektora $\mathbf{b}'$ daje się zapisać jako

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} b'_k \frac{d\mathbf{e'_k}}{dt} = \sum_{k=1}^{3} b'_k \sum_{j=1}^{3} \alpha_{kj}\mathbf{e'_j} = \\ \mathbf{e'_1}(-\omega'_3 b'_2 + \omega'_2 b'_3) + \mathbf{e'_2}(-\omega'_1 b'_3 + \omega'_3 b'_1) + \mathbf{e'_3}(-\omega'_2 b'_1 + \omega'_1 b'_2) = \vec{\omega} \times \mathbf{b}'.\end{aligned} \tag{13}$$

Pochodna wektora $\mathbf{b}'$ ma więc postać

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}' = \frac{d'}{dt}\mathbf{b}' + \vec{\omega} \times \mathbf{b}'. \tag{14}$$

Transformacja prędkości ma zatem postać

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}', \tag{15}$$

gdzie $\mathbf{v}_{tr} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ jest prędkością ruchu translacyjnego układu U' względem U, a $\mathbf{v}'$ jest prędkością rozważanego punktu materialnego w układzie U'.

Zróżniczkowanie relacji transformcyjnej dla prędkości prowadzi do formuły transformacyjnej dla przyspieszenia

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \mathbf{r}') = \\ \mathbf{a}_{tr} + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times (\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}') = \\ \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}' + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}').\end{aligned} \tag{16}$$

Wektor $\vec{\omega}$ ma sens prędkości kątowej, co można wykazać następująco. Niech $\vec{\omega}$ ma tylko niezerową składową z'. Oznaczmy $\omega dt = d\alpha$, gdzie $\vec{d\alpha}$ jest wektorem skierowanym wzdłuż osi z'; ma trzecią składową $d\alpha$. Przyrost wektora $\mathbf{r}'$ w czasie dt wynosi $d\mathbf{r}' = d\alpha \times \mathbf{r}'$. Wektor $\mathbf{r}'$ uległ więc zmianie

$$\mathbf{r}' + d\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y'd\alpha \\ x'd\alpha' \\ 0 \end{pmatrix} = \tag{17}$$

$$\{I + d\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \tag{18}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Weźmy teraz α o skończonej wartości i wykonajmy N transformacji, z których każda odpowiada wartości $\frac{\alpha}{N}$. Otrzymamy

$$\mathbf{r}' + d\mathbf{r}' = \{I + \frac{\alpha}{N} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}^N \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightarrow_{N\to\infty} \exp\{\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Eksponent macierzy w powyższej formule łatwo jest obliczyć, jeśli zauważyć, że macierz w potędze 0 jest macierzą jednostkową I, macierz w potędze parzystej $2n$ jest macierzą $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pomnożoną przez $(-1)^n$, a w potędze nieparzystej $2n-1$ jest macierzą wyjściową pomnożoną przez $(-1)^{n-1}$

$$\exp\{\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}(-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Otrzymano macierz obrotu wokół osi z o kąt $\alpha = \omega t$. W ogólności wektor $\vec{\omega}$ zmienia w czasie kierunek i wartość.

Wyraz $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}')$ ma sens przyspieszenia dośrodkowego i można przepisać go jako

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}') = \vec{\omega}(\vec{\omega}\mathbf{r}') - \omega^2\mathbf{r}' = -\omega^2\mathbf{r}'_{\perp}, \tag{21}$$

gdzie $\mathbf{r}'_{\perp}$ jest składową wektora $\mathbf{r}'$ prostopadłą do osi obrotu ω.

Warto zwrócić uwagę na równość pochodnych wektora $\vec{\omega}$ w obu układach

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\omega} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}. \tag{22}$$

2 Zasady dynamiki

Zasady dynamiki w programie szkoły średniej podawane są nieściśle.

Pierwsza zasada Newtona to postulat istnienia układu inercjalnego, to jest takiego, w którym jeśli ciało nie jest poddane żadnemu oddziaływaniu, porusza się ruchem jednostajnym (w szczególności może spoczywać).
Układ inercjalny jest idealnym modelem: nie potrafimy wskazać takiego układu, natomiast istniejące układy mogą być w dobrym przybliżeniu inercjalne dla określonych procesów. Na przykład układ związany z Ziemią może być w dobrym przybliżeniu inercjalny w życiu codziennym, ale z powodu ruchu wirowego Ziemi nie jest inercjalny, gdy bada się ruch mas powietrza lub prądów morskich.

Jeśli układ U jest inercjalny, to układ U' jest inercjalny wtedy i tylko wtedy, gdy porusza się ruchem jednostajnym względem U. Dowód wynika z wzoru na transformację przypspieszeń.

Mianowicie jeśli układ U' porusza się jednostajnie względem U, to $\mathbf{a_{tr}} = 0$ i $\vec{\omega} = 0$. Wtedy gdy $\mathbf{a} = 0$, to $\mathbf{a}' = 0$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\mathbf{a} = \mathbf{a}' = 0$ dla dowolnego ruchu w U'. Dla ruchu polegającego na spoczynku w początku O', tzn. $\mathbf{r}'(\mathbf{t}) = 0$, otrzymujemy $\mathbf{a}_{tr} = 0$. Dla ruchu polegającego na spoczynku na osi x', tzn. $\mathbf{r}' = (x'_0, 0, 0)$ otrzymujemy po wykonaniu iloczynów wektorowych

$$x'_0\{\mathbf{i}'(-\omega_{y'}^2 - \omega_{z'}^2) + \mathbf{j}'(\dot{\omega}_{z'} + \omega_{x'}\omega_{y'}) + \mathbf{k}'(-\dot{\omega}_{y'} + \omega_{x'}\omega_{z'})\} = 0, \tag{23}$$

skąd wnosimy w szczególności, że $\omega_{y'} = \omega_{z'} = 0$. Podobnie przyjmując spoczynek na osi y' otrzymamy, że $\omega_{z'} = \omega_{x'} = 0$. Zatem prędkość kątowa $\vec{\omega} = 0$.

Wniosek jest taki, że

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{v}', \tag{24}$$

oraz po scałkowaniu

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_{tr}(t - t_0) + \mathbf{r}'. \tag{25}$$

Ta ostatnia relacja znana jest jako transformacja Galileusza; opisuje ona przejście od jednego układu inercjalnego do drugiego takiego układu.

Druga zasada dynamiki wymaga szerszego komentarza. Relacja

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{26}$$

jest prawdziwa w układzie inercjalnym, ale zawiera dwie dotąd niezdefiniowane wielkości. Trzeba odnieść się do doświadczenia. Niech grupa punktów materialnych numerowanych indeksem i poddana zostanie oddziaływaniu z tym samym urządzeniem przyspieszającym; $i{-}ty$ obiekt doświadczył przyspieszenia $\mathbf{a_i}$. Istnieją współczynniki m_i, takie że

$$m_1\mathbf{a_1} = m_2\mathbf{a_2} = ...m_n\mathbf{a_n} = ... \ . \tag{27}$$

Można takie postępowanie powtórzyć z innymi urządzeniami przyspieszającymi. Okazuje się, że można dobrać te same współczynniki m_i dla ciała i, niezależnie od urządzenia przyspieszającego. To pozwala przypisać $i - temu$ punktowi materialnemu parametr m_i, zwany masą bezwładną, niezależny od doświadczenia, jakiemu go poddano, Urządzeniu przyspieszającemu można przypisać wielkość $\mathbf{F} = m_i\mathbf{a_i}$, niezależną od ciała i, zwaną siłą. Dopiero po takim komentarzu można napisać wzór $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Obowiązuje zasada niezależności sił: jeśli na punkt materialny działa więcej sił, to porusza się on tak, jakby działała jedna siła, wypadkowa wszystkich sił. Jest to fakt empiryczny.

W fizyce nierelatywistycznej masa grawitacyjna pojawia się także w prawie powszchnej ciążenia. Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 przyciągają się z siłą

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{28}$$

gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem łączącym punkty 1 i 2, a G jest stałą grawitacji. Równość masy bezwładnej i masy grawitacyjnej jest w fizyce nierelatywistycznej faktem doświadczalnym. Teoretyczne uzadadnienie tej równości pojawia się na poziomie ogólnej teorii względności.

Siła $\mathbf{F}$ działająca na punkt materialny może zależeć, jak wynika z doświadczenia, od jego położenia $\mathbf{r}$, prędkości $\dot{\mathbf{r}}$ i czasu

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \tag{29}$$

Dla ruchu (Newtona) w jednym wymiarze równanie ruchu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t) \tag{30}$$

jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, drugiego rzędu na funkcję $x = x(t)$. Rozwiązanie ogólne zawiera dwie stałe. Z warunków brzegowych, najczęściej początkowych: $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ wyznacza się te stałe, otrzymując rozwiązanie szczególne.

Odpowiednio w trzech wymiarach równanie ruchu (Newtona)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \tag{31}$$

jest układem trzech sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych na funkcje $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ Rozwiązanie ogólne zawiera 6 stałych. Wyznacza się je z 6 warunków początkowych: $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r_0}$, $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0$.

W teorii równań różniczkowych dowodzi się, że przy pewnych założeniach dotyczących regularności funkcji $\mathbf{F}$, dla ustalonych warunków początkowych rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne. Dotyczy to także układów punktów materialnych, o czym później. Oznacza to, że układ punkt ów materialnych pod wpływem danej przyczyny (zespołu sił) przy danych warunkach początkowych porusza się w zdeterminowamy sposób.

W pewnym okresie historycznym stwarzało to pokusę myślenia o świecie jak o puszczonej w ruch maszynie poruszającej się w zdeterminowany sposób. Jest to idea wielokrotnie sfalsyfikowana, nie tylko dlatego, że prawa mechaniki klasycznej nie wystarczają do opisu świata. Okazuje się także na poziomie mechaniki klasyczej, że przewidywanie zachowania układu mechanicznego w przyszłości wymagałoby znajomości warunków początkowych z nieskończoną dokładnością. Na ogół dwa układy startujące z nieznacznie różniących się warunków początkowych po niedługim czasie zachowują się jakościowo zupełnie inaczej; jest to tak zwany chaos deterministyczny.

2.1 Równanie Newtona w układzie nieinercjalnym

Równanie Newtona można napisać w układzie nieinercjalnym pod warunkiem uwzględnienia modyfikacji. Z równania w układzie inercjalnym $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ i z relacji transformacyjnej dla przyspieszeń wynika, że

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{tr} - 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'). \tag{32}$$

Modyfikacja polega więc na pojawieniu się dodatkowych wyrazów o charakterze siły. Są to tzw. siły bezwładności, o naturze różnej od natury sił działających. Wyraz z przyspieszeniem translacyjnym jest odpowiedzialny za efekty doświadczane na przykład w przyspieszająjej windzie lub pojeździe. Ostatni wyraz jest siłą odśrodkową - ma wartość taką jak siła dośrodkowa, przeciwny znak i pojawia się w innymu kładzie odniesienia niż siła dośrodkowa. Wyraz $-2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}'$ znany jest jako siła Coriolisa. Na Ziemi pojawia się na przykład w doświadczeniu z wahadłem Foucaulta (zmiana płaszczyzny drgań wahadła), a w większej skali powoduje spychanie i wirowanie mas wody i powietrza. W układzie związanym z Ziemią nie obserwujemy jej ruchu wirowego, ale z efektów sił bezwładności możemy o tym ruchu wnosić.

Problem dobrze ilustruje zadanie z I pracowni. Na wirującej tarczy znajduje się miniaturowa armatka, a pocisk wpada do przegródki na obwodzie tarczy. Gdy tarcza wiruje, pocisk nie wpada do przegódki naprzeciw wylotu armatki. W układzie laboratoryjnym tłumaczy się to faktem, że w czasie lotu pocisku tarcza sice obróciła, w układzie tarczy należy powiedzieć, że działa siła bezwładności - Coriolisa.

2.2 Zasada zachowania pędu

Pęd punktu materialnego definiuje się jako iloczyn masy i prędkości $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Równania Newtoma można więc zapisać jako

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{33}$$

lub po scałkowaniu

$$\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt. \tag{34}$$

Zmiana pędu w czasie jest więc równa tzw. popędowi czyli całce z siły po czasie. Jeśli siła jest równa zeru, pęd jest zachowany, czyli jest stałą ruchu (całką ruchu).

2.3 Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu punktu materialanego zdefiniowany jest jako iloczyn wektorowy

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{35}$$

Z równania Newtona wynika, ż

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{D}, \tag{36}$$

gdzie $\mathbf{D}$ jest momentem siły. Jeśli moment siły jest równy zeru, moment pędu jest zachowany (jest stałą ruchu czyli całką ruchu). Zachowanie momentu pędu oznacza, że ruch jest płaski, bo zarówno wektor położenia $\mathbf{r}$, jak i jego przyrost $\dot{\mathbf{r}}dt$ są prostopadłe do stałego kierunku $\mathbf{J}$. Jeśli siła działa wzdłuż kierunku wektora wodzącego $\mathbf{r}$, moment siły zeruje się i moment pędu jest zachowany.

2.4 Zasada zachowania energii

Równanie Newtona pomnóżmy obustronnie przez prędkość $\dot{\mathbf{r}}$

$$\frac{dm\dot{\mathbf{r}}}{dt}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}. \tag{37}$$

lub inaczej

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}. \tag{38}$$

Wielkość $T \equiv \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}$ nazywa się energią kinetyczną. Scałkowanie ostatnego równania po czasie daje

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)\dot{\mathbf{r}}dt. \tag{39}$$

Ograniczmy się chwilowo do sił zależnych tylko od położenia. Wtedy całkę po prawej stronie można napisać jako

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}dt = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \tag{40}$$

gdzie C jest trajektorią punktu materialnego o początku w punkcie $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$ i końcu w punkcie $P_1 = \mathbf{r}(t_1)$. Całkę tę nazywamy pracą. Tak więc

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \tag{41}$$

Przyrost energii kinetycznej jest więc równy pracy wykonanej na punkcie materialnym przez siłę $\mathbf{F}$.

Istnieje klasa sił potencjalnych, tzn. takich, że istnieje jednoznaczna funkcja $V(\mathbf{r},t)$ zwana potencjałem, taka że

$$\mathbf{F} = -\nabla V \equiv -(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}). \tag{42}$$

Jeśli dodatkowo V nie zależy od czasu, siłę nazywamy zachowawczą. Wtedy

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathbf{dr} = -\int_{\mathbf{C}} \nabla\mathbf{V}\mathbf{dr} = -\mathbf{V}(\mathbf{r}(\mathbf{t_1})) + \mathbf{V}(\mathbf{r}(\mathbf{t_0})). \tag{43}$$

Oznacza to, że V jest energią potencjalną, a energia całkowita T+V jest stałą (całką) ruchu. Praca zależy jedynie od punktu początkowego i końcowego, nie zależy natomiast od szczegółów trajektorii. Jeśli C_1 i C_2 są dwiema dowolnymi trajektoriami łączącymi punkty $P_0 = \mathbf{r}_0$ i $P_1 = \mathbf{r}_1$ i

$$\int_{C_1} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}d\mathbf{r}, \tag{44}$$

to

$$\int_{C_1} \mathbf{F}d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r} = 0, \tag{45}$$

gdzie $-C_2$ jest krzywą zorientowną od P_1 do P_0, a C jest krzywą zamkniętą. Dla sił zachowawczych istnienie potencjału w obszarze jednospójnym (czyli takim, że każda krzywa daje się ściągnąć do punktu) jest równoznaczne z niezależnością pracy od wyboru trajektorii łączącej punkt początkowy z końcowym oraz z zerowaniem się pracy po obwodzie zamkniętym.

Weźmy dowolną krzywą zamkniętą C w obszarze jednospójnym. Z twierdzenia Stokesa o zamianie całki krzywoliniowej po obwodzie zamkniętym na całkę powierzchniową

$$\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{F}d\mathbf{S}, \tag{46}$$

gdzie S jest dowolną powierzchnią rozpiętą na krzywej C, wynika, że warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia potencjału jest zerowanie się rotacji pola sił w tym obszarze (przy założeniu dostatecznej regularności funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.). Potencjał można wyznaczyć jako

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{C'}^{P=\mathbf{r}} \mathbf{F}d\mathbf{r}, \tag{47}$$

gdzie C' jest dowolną krzywą łączącą dowolnie wybrany punkr Q z $P = \mathbf{r}$. Potencjał jest więc określony z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej.