Propagacja fali płaskiej w jednorodnym, nieograniczonym ośrodku ze stratami/wzmocnieniem

Równanie falowe

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} + \mu_0 \omega^2 \varepsilon\, \vec{\mathbf{E}} = 0; \quad \varepsilon := \varepsilon_0 - \frac{e^2}{m} \sum_j^Z \left(\omega_j^2 - \omega^2 - 2i\eta_j \omega\right)^{-1}$$

Zespolone współcz. przenikalności dielektrycznej i załamania:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \mathbf{N}_\mathbf{R}^2 \qquad \mathbf{N}_\mathbf{R} = \left(n_R - i\, k_e\right)$$

Rozwiązanie - fala płaska w kierunku z:

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \vec{A} \cdot \exp(-i\beta\, z) \cdot \exp(i\omega\, t)$$

Stała propagacji $\beta^2 = \mu_0 \omega^2 \varepsilon = k_0^2 \mathbf{N}_\mathbf{R}^2$

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \vec{A} \cdot \exp\left[-k_0\, k_e\, z\right] \cdot \exp\left[-i\left(k_0 n_R\, z - \omega\, t\right)\right]$$

$k_e < 0$ **- wzmocnienie** $\qquad$ $k_e > 0$ **- straty**

Jeżeli ośrodek jest ograniczony, pochodne po współrzędnych przestrzennych z parametrów materiałowych nie znikają.

Jeżeli założyć, że pole zależy od kierunku *z* tylko poprzez zespoloną stałą propagacji β:

$$\vec{\mathbf{E}}(x,y,z,t)=\vec{\mathrm{E}}(x,y)\cdot\exp\left[-i(\beta z-\omega t)\right]$$

$$\vec{\mathbf{H}}(x,y,z,t)=\vec{\mathrm{H}}(x,y)\cdot\exp\left[-i(\beta z-\omega t)\right],$$

uzyskuje się dla składowych zespolonych pól **E** i **H**

$$\mathbf{E}_{\mathbf{x}}\left(\mu_0\omega^2\varepsilon-\beta^2\right)+i\left(\beta\frac{\partial\mathbf{E}_{\mathbf{z}}}{\partial x}+\mu_0\omega\frac{\partial\mathbf{H}_{\mathbf{z}}}{\partial y}\right)=0$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{y}}\left(\mu_0\omega^2\varepsilon-\beta^2\right)+i\left(\beta\frac{\partial\mathbf{E}_{\mathbf{z}}}{\partial y}-\mu_0\omega\frac{\partial\mathbf{H}_{\mathbf{z}}}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}_{\mathbf{z}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}_{\mathbf{z}}}{\partial y^2}+\left(\mu_0\omega^2\varepsilon-\beta^2\right)\mathbf{E}_{\mathbf{z}}=0$$

$$\mathbf{H_x}\left(\mu_0\omega^2\varepsilon-\beta^2\right)+i\left(\beta\frac{\partial\mathbf{H_z}}{\partial x}-\mu_0\omega\frac{\partial\mathbf{E_z}}{\partial y}\right)=0$$

$$\mathbf{H_y}\left(\mu_0\omega^2\varepsilon-\beta^2\right)+i\left(\beta\frac{\partial\mathbf{H_z}}{\partial y}+\mu_0\omega\frac{\partial\mathbf{E_z}}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{H_z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{H_z}}{\partial y^2}+\left(\mu_0\omega^2\varepsilon-\beta^2\right)\mathbf{H_z}=0$$

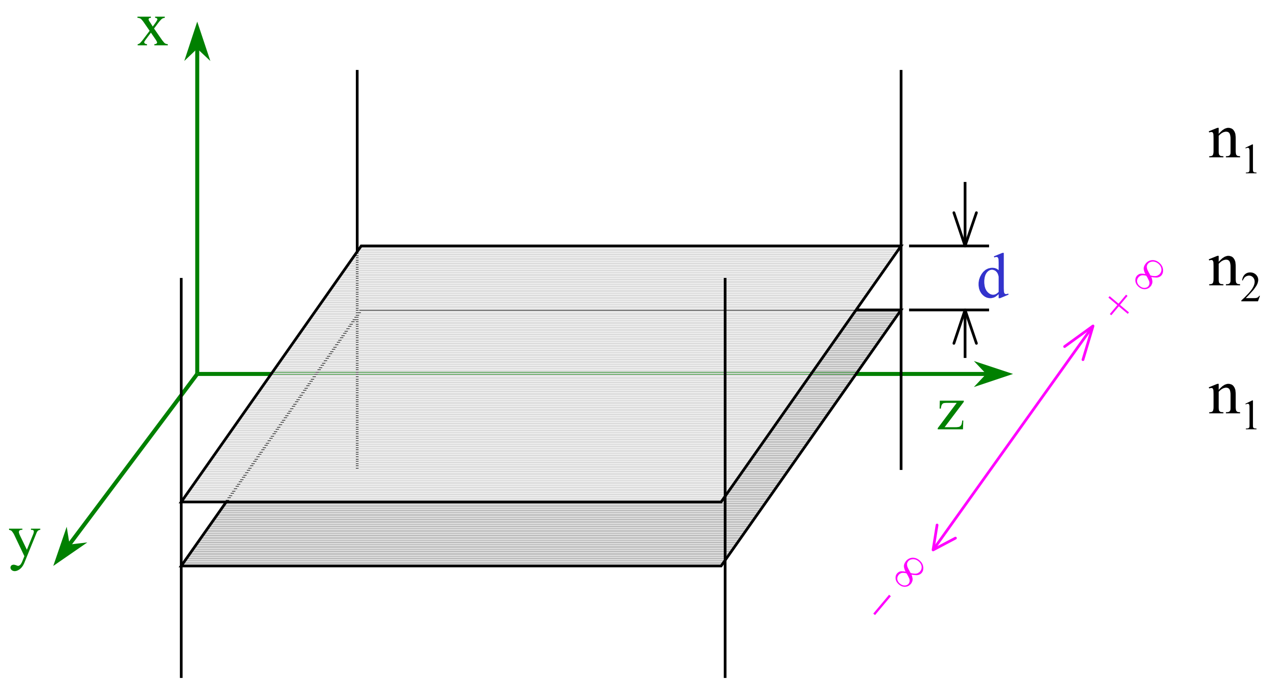
teraz $\boxed{\beta^2\neq\mu_0\omega^2\varepsilon\ ,}$

oraz składowe amplitud **E** i **H** zależą od x i y.

Oczywiście nadal: $\varepsilon=\varepsilon_0\mathbf{N_R^2}$ $\quad\mathbf{N_R}=n_R-ik_e$

Należy wyznaczyć β

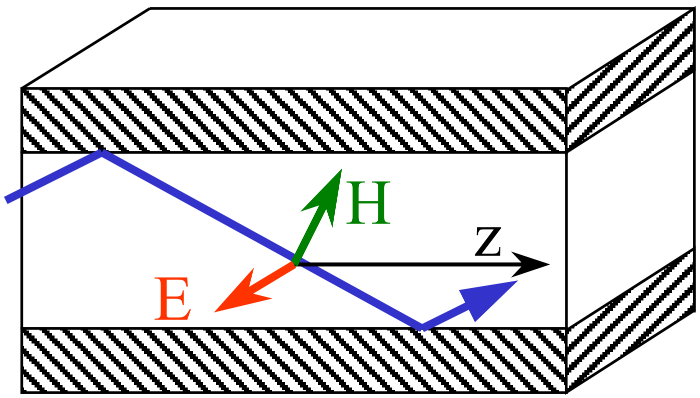
Płaski falowód symetryczny

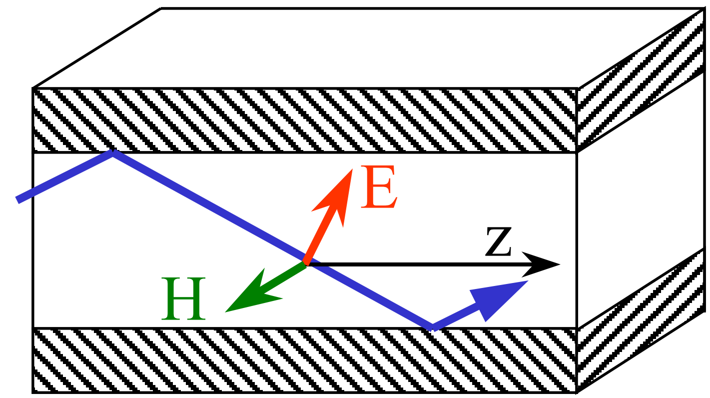


Ponieważ płaszczyzny graniczne rozciągają się od -∞ δο +∞, nie ma zależności od współrzędnej *y*

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

Mody w falowodzie płaskim





E ⊥ z - mod TE

H ⊥ z - mod TM

Mod TE:

$$\mathbf{E_x} = 0 \qquad \mathbf{H_x} = \frac{-\beta}{\mu_0\omega}\mathbf{E_y}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{E_y}}{\partial x^2} + \left(\mu_0\omega^2\varepsilon - \beta^2\right)\mathbf{E_y} = 0} \qquad \mathbf{H_y} = 0$$

$$\mathbf{E_z} = 0 \qquad \mathbf{H_z} = \frac{i}{\mu_0\omega}\frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial x}$$

E_y i H_z ciągłe na granicy płaszcz-rdzeń

Mod TM:

$$\mathbf{E_x} = \frac{\beta}{\varepsilon\omega}\mathbf{H_y} \qquad \mathbf{H_x} = 0$$

$$\mathbf{E_y} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{H_y}}{\partial x^2} + \left(\mu_0\omega^2\varepsilon - \beta^2\right)\mathbf{H_y} = 0}$$

$$\mathbf{E_z} = \frac{-i}{\varepsilon\omega}\frac{\partial \mathbf{H_y}}{\partial x} \qquad \mathbf{H_z} = 0$$

E_z i H_y ciągłe na granicy płaszcz-rdzeń