Mody gaussowskie w rezonatorze sferycznym

- Mod wiązki: rozkład pola elektromagnetycznego który reprodukuje sam siebie we względnej amplitudzie i fazie po całkowitym obiegu rezonatora.
- Założenie: wzbudza się pole w postaci wiązki gaussowskiej.
- Wniosek: stabilność modu oznacza reprodukowanie się parametru Kogelnika po obiegu rezonatora:

$$\mathbf{q}(z+2d)=\mathbf{q}(z)\,.$$

Warunek stabilności

Stosując model soczewkowy rezonatora oraz wyrażając jego własności w postaci macierzy [ABCD] uzyskuje się na podstawie twierdzenia Kogelnika:

$$\mathbf{q}(z+2d)=\frac{A\cdot\mathbf{q}(z)+B}{C\cdot\mathbf{q}(z)+D}=\mathbf{q}(z)$$

← to jest równanie na q, które można łatwo rozwiązać:

Dla $B \neq 0$:

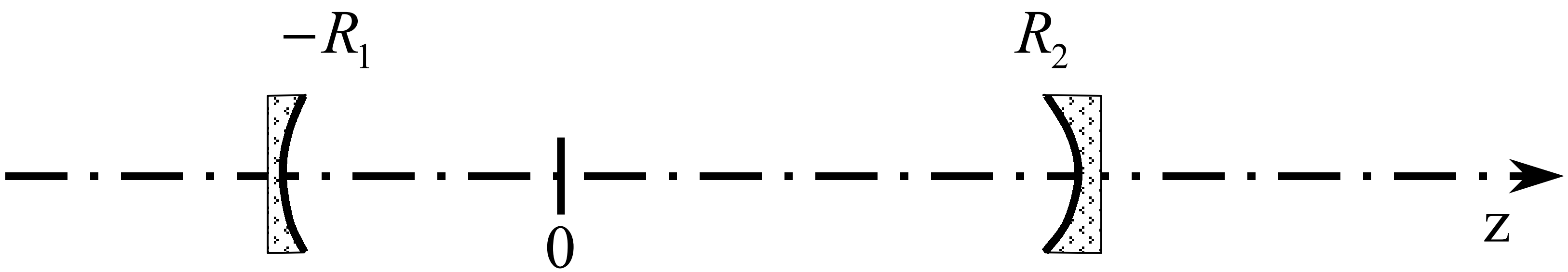
$$\frac{1}{\mathbf{q}(z)}=-\frac{A-D}{2B}\pm\frac{i}{B}\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\quad\left[=\frac{1}{R(z)}-i\frac{\lambda}{\pi\, w^2(z)}\right]$$

Jeżeli płaszczyzny Π leżą na zwierciadle 1, promień krzywizny fali w tym miejscu wynosi:

$$R(z_\Pi)=\frac{2B}{A-D}=-R_1$$

Wniosek: krzywizna frontu falowego wiązki na zwierciadle musi pasować do krzywizny zwierciadła.

Wyznaczmy położenie przewężenia i wartość z_0:



$$z = -z_1 \qquad\qquad z = z_2$$

$$-R_1 = -z_1\left[1+\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2\right] \qquad z_1 + z_2 = d \qquad R_2 = z_2\left[1+\left(\frac{z_0}{z_2}\right)^2\right]$$

Rozwiązując układ 3 równań otrzymujemy:

$$z_1 = d\,\frac{d-R_2}{2d-R_1-R_2}\,, \quad z_2 = d\,\frac{d-R_1}{2d-R_1-R_2}$$

$$z_0^2 = d\,\frac{(d-R_1)(d-R_2)(R_1+R_2-d)}{(2d-R_1-R_2)^2}$$

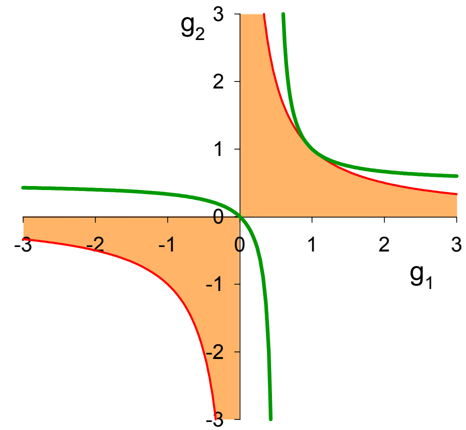
$$\Rightarrow \quad d \neq R_{1,2} \Leftrightarrow g_{1,2} \neq 0$$

$$R_1 + R_2 \neq d \Leftrightarrow g_1 \cdot g_2 \neq 1$$

Wniosek: geometria rezonatora **jednoznacznie** określa parametry wiązki, na brzegach diagramu stabilności nie ma modów gaussowskich.

Przypadek szczególny: $R_1 + R_2 = 2d$ albo $g_1 + g_2 = 2g_1 g_2$

Jest to układ konfokalny: $f_1 + f_2 = d$



Wniosek: tylko dla $g_1 = g_2 = 0$
rezonator może być stabilny

Wówczas $R_1 = R_2 = d$
i w konsekwencji $B = 0$ - trzeba liczyć osobno.

Można pokazać, że dla dowolnego położenia płaszczyzn Π_1 i Π_2

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow q(z+2d) \equiv q(z)$$

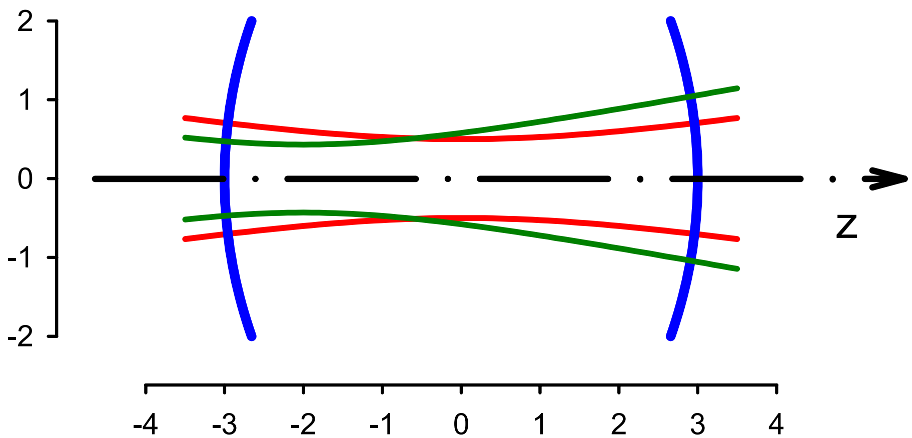
Jakie wiązki pasują do zwierciadeł stabilnego rezonatora konfokalnego?

Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} -R = -z_1\left[1+\left(\dfrac{z_0}{z_1}\right)^2\right] = R = z_2\left[1+\left(\dfrac{z_0}{z_2}\right)^2\right] \\ z_1 + z_2 = d \qquad\qquad 0 > z_{1,2} > d \end{cases}$$

otrzymuje się: $z_0(z_1) = \sqrt{z_1(d-z_1)}\,, \quad w_0^2(z_1) = \dfrac{\lambda}{\pi}\sqrt{z_1(d-z_1)}$

przy czym dla $z_1 = z_2 = d/2: \quad z_0, w_0 = \max\,, \quad \theta_{\text{rozbieżności}} = \min$



$k_0 = 24\,, \quad \lambda = 0.26$

$w_0 = 0.5\,, \quad z_0 = 3.0$

$w_0 = 0.43\,, \quad z_0 = 2.24$