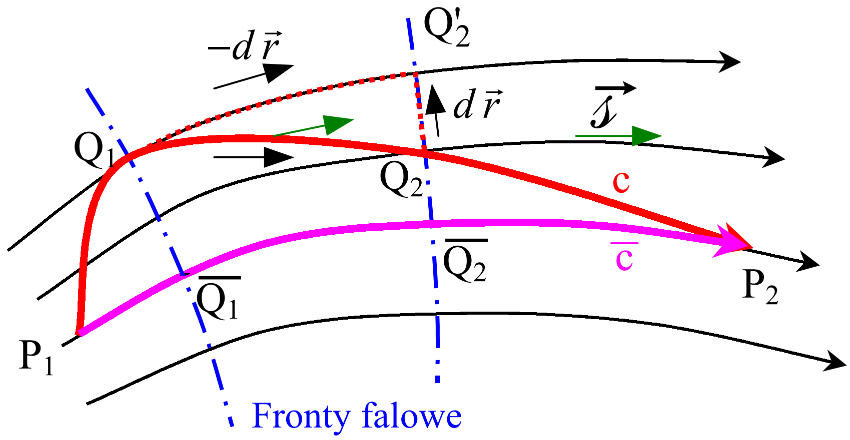
Zasada Fermata

Droga optyczna: $$\int_{P_1}^{P_2} n(\vec r)\,ds = \int_{P_1}^{P_2} \frac{c}{v(\vec r)}\,ds = c\int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v(\vec r)} = c\int_{P_1}^{P_2} \frac{d\left[v(\vec r)t\right]}{v(\vec r)} = c\int_{P_1}^{P_2} dt$$

Droga optyczna od P_1 do P_2 wzdłuż realnego promienia jest mniejsza od liczonej wzdłuż dowolnej innej krzywej łączącej punkty P_1 i P_2.
Albo: czas przebiegu światła po drodze optycznej jest minimalny.

DOWÓD



$\overline{c}$- promień rzeczywisty

c – dowolna inna krzywa łącząca punkty P_1 i P_2 przecinająca fronty falowe w punktach Q_1 i Q_2

Twierdzenie Stokes'a:

$$\int_S \left(\nabla \times \vec A\right)\cdot d\vec S = \oint \vec A\, d\vec l$$ ($\vec A$ - dowolny wektor, $\vec S$ - wektor normalny do pow. S)

W naszym przypadku $\vec A = \nabla J(\vec r)$. Ponieważ zawsze $\nabla \times (\nabla J) = 0$, to dla dowolnej krzywej zamkniętej: $\oint \nabla J(\vec r)\,d\vec l = \oint n(\vec r)\vec{s}\,d\vec l = 0$.
Zastosujmy to twierdzenie do trójkąta Q_1, Q_2, Q'_2 :

$$\int_{Q_1}^{Q_2} n(\vec r)\vec{s}\,d\vec r \quad + \quad \int_{Q_2}^{Q'_2} n(\vec r)\vec{s}\,d\vec r \quad - \quad \int_{Q_1}^{Q'_2} n(\vec r)\vec{s}\,d\vec r \quad = \quad 0$$

$\int$ dowolny odcinek — $\int$ front falowy — $\int$ po promieniu

$\vec{s}\,d\vec r = |d\vec r|\cos(\vec{s}, d\vec r)$ — $\vec{s} \perp d\vec r \Rightarrow \vec{s}\,d\vec r = 0$ — $\vec{s} \parallel d\vec r \Rightarrow \vec{s}\,d\vec r = |d\vec r| = ds$

$\vec{s}\,d\vec r \le |d\vec r| = ds$ — $\int \ldots = 0$

Tak więc, opuszczając środkową całkę, uzyskujemy:

$$\int_{Q_1}^{Q_2} n(\vec{r})ds \ge \int_{Q_1}^{Q_2} n(\vec{r})\vec{s}\, d\vec{r} = \int_{Q_1}^{Q'_2} n(\vec{r})\vec{s}\, d\vec{r} = \int_{Q_1}^{Q'_2} n(\vec{r})ds$$

albo:

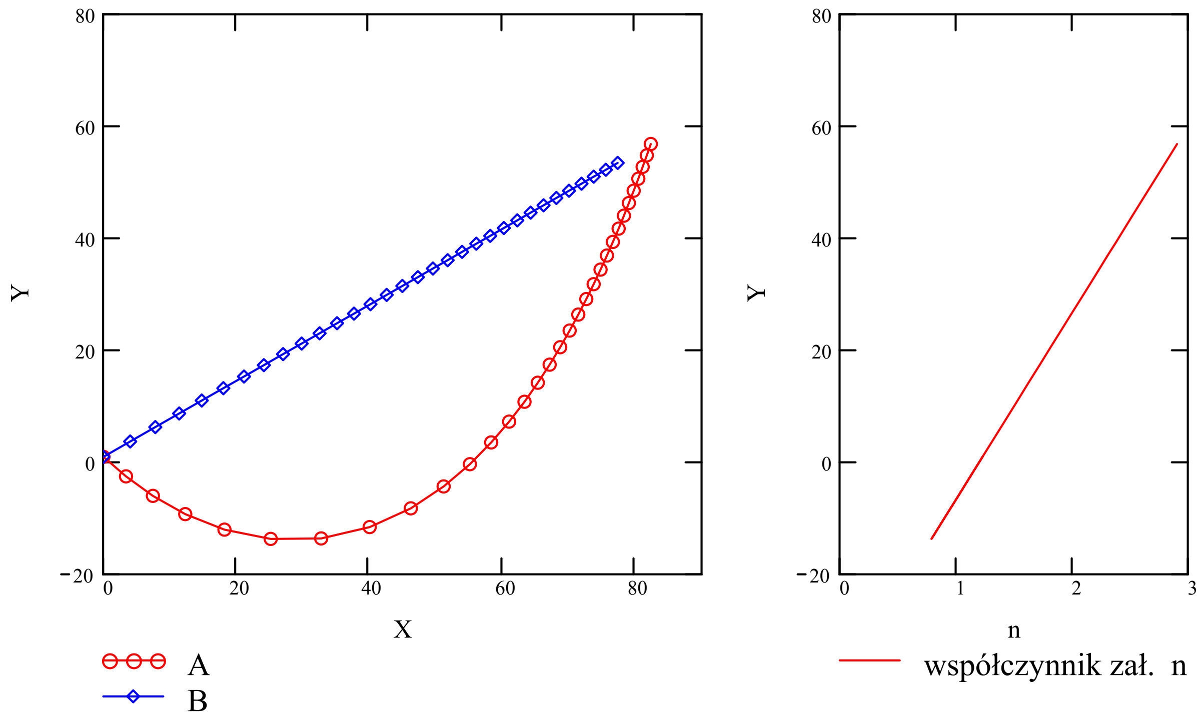
$$\int_{Q_1}^{Q_2} dJ(\vec{r}) \ge \int_{Q_1}^{Q'_2} dJ(\vec{r}) = J(Q'_2) - J(Q_1) = J(\bar{Q}_2) - J(\bar{Q}_1) = \int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_2} n(\vec{r})ds$$

(druga równość wynika z faktu, że punkty Q'_2 i $\bar{Q}_2$ oraz Q_1 i $\bar{Q}_1$ leżą na tych samych frontach falowych, gdzie $J = \text{const.}$)

Cały promień od P_1 do P_2 można złożyć z takich odcinków $[Q_1,Q_2]$:

$$\boxed{\int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r})ds_c \ge \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r})ds_{\bar{c}}}$$

c.n.d.



A - rzeczywisty promień światła - odcinki pokonywane w jednakowych odstępach czasu

B - hipotetyczny, prostoliniowy promień światła, odcinki pokonywane w takich samych odstępach czasu