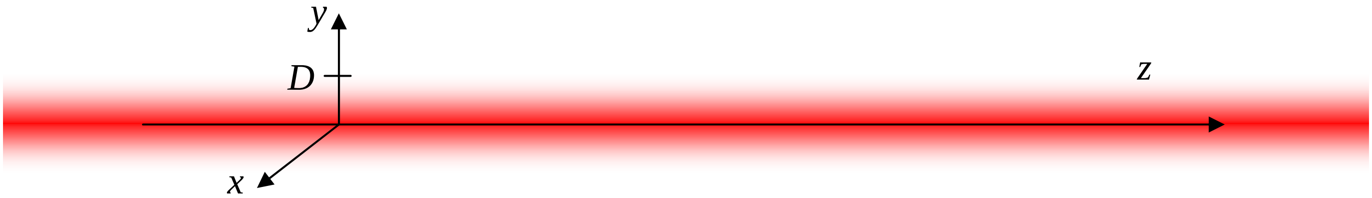
Wiązki gaussowskie

I. Przedmiot opisu: pole rozchodzi się w kierunku osi z, ograniczone do okolicy osi optycznej:



Pole elektryczne można rozłożyć na 2 składowe (E_z i poprzeczną: E_t). Podobnie dywergencję można rozłożyć na te same dwie ortogonalne składowe:

$$0 = \nabla\vec{E} = \left(\nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\overrightarrow{E_t} + \hat{z}E_z\right) = \nabla_t \overrightarrow{E_t} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\left|\nabla_t \overrightarrow{E_t}\right| = \left|\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|$$

Oszacujmy obie strony tej równości:

a) zależność od z jest typu e^{-ikz} (jak dla fali bieżącej)

$$\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} \cong E_{0z}\frac{\partial}{\partial z}e^{-ikz} = -ikE_{0z}e^{-ikz} = -i\frac{2\pi}{\lambda}E_{0z}e^{-ikz}$$

b) ponieważ wiązka jest ograniczona, to $E(D) \cong 0 \Rightarrow E_t(D) \cong 0$. Tak więc:

$$\nabla_t E_t \cong \frac{E_t(D) - E_t(0)}{D} \cong -\frac{E_t(0)}{D}$$

c) wstawiając:

$$\left|-\frac{E_t(0)}{D}\right| \cong \left|-i\frac{2\pi}{\lambda_0}nE_{0z}e^{-ikz}\right|$$

$$\left|E_{0z}\right| \cong \frac{1}{2\pi n}\frac{\lambda_0}{D}\left|E_t\right| \ll \left|E_t\right|$$

WNIOSEK: składowa pola w kierunku rozchodzenia się fali jest znacznie mniejsza od składowej poprzecznej – pole jest typu TEM

II. Równanie fali **nieco odbiegającej** od płaskiej

a) fala płaska $\vec{e}(x,y,z,t)=\overrightarrow{E_0}e^{-ikz}e^{i\omega t}$ rozchodzi z prędkością $v=\frac{c}{n}=\frac{\omega}{k}$

b) fala prawie płaska: Funkcja $\Psi(x,y,z)$ opisuje jak dalece fala różni się od fali płaskiej:

$$\vec{e}(x,y,z,t)=\overrightarrow{E_0}\Psi(x,y,z)e^{-ikz}e^{i\omega t}$$

Wstawiając do równania falowego: $\Delta e-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}=0$ i eliminując zależność od czasu:

$$\left(\nabla_t+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left[E_0\Psi(x,y,z)e^{-ikz}\right]=\left(\nabla_t{}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[E_0\Psi(x,y,z)e^{-ikz}\right]=$$

$$=E_0\left[\nabla_t{}^2\Psi(x,y,z)\right]e^{-ikz}+E_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\Psi(x,y,z)e^{-ikz}\right]=$$

$$=E_0\left[\nabla_t{}^2\Psi+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z}-k^2\Psi\right]e^{-ikz}=\left(i\frac{\omega}{v}\right)^2E_0\Psi(x,y,z)e^{-ikz}$$

albo, dzieląc przez E_0e^{-ikz}:

$$\nabla_t{}^2\Psi+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0 \longleftarrow$$

To jest ścisłe równanie na $\Psi(x,y,z)$

Dla zagadnień optycznych to równanie można uprościć.
Zbadajmy:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}-2ik\right]\Psi$$

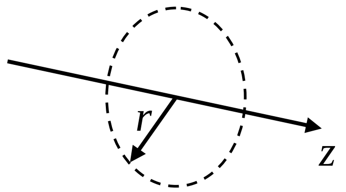
Aby operacja $\partial/\partial z$ była porównywalna z mnożeniem przez *k*, funkcja Ψ powinna zmieniać się tak szybko, jak e^{-ikz}. Jednak ten człon nie wchodzi do Ψ! Tak więc wyraz z pierwszą pochodna można pominąć w porównaniu do mnożenia przez *k*:

$$\boxed{\nabla_t{}^2\Psi-2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0} \longleftarrow$$

To przypomina równanie Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U\right]\Psi=0$$

III. Poszukujemy **rozwiązania o symetrii cylindrycznej**:



$$\nabla_t^{\,2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Równanie ma więc postać:

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) - i\cdot 2k\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0}$$

W przypadku ogólnym rozwiązaniami są *wielomiany Laguerre'a*. Zbadajmy najpierw przypadek najprostszy – zbadajmy, czy rozwiązaniem jest funkcja:

$$\Psi_0(r,z) = e^{-i\left[p(z)+\frac{k}{2q(z)}r^2\right]}$$

gdzie $p(z)$ i $q(z)$ są pewnymi funkcjami zespolonymi

Wstawiając do równania, wykonując różniczkowania i grupując wg. potęg *r*:

$$\left\{\left[\frac{k^2}{q^2(z)}(q'(z)-1)\right]r^2 - 2k\left[p'(z)+\frac{i}{q(z)}\right]r^0\right\}\Psi_0(r,z) = 0$$

Aby równanie było spełnione dla dowolnego *r* **wszystkie** współczynniki przy *r* muszą się zerować:

$$\begin{cases} q'(z)-1 = 0 & \Rightarrow \quad q(z) = q_0 + z \\ p'(z)+\dfrac{i}{q(z)} = 0 & \begin{cases} \Rightarrow \quad p \text{ nie zależy od } r \\ \text{(do tego wrócimy później)} \end{cases} \end{cases}$$

Czy funkcja $q(z)$ może być rzeczywista (tzn. czy $q_0 \in \Re$?). Załóżmy, że tak. Wówczas:

$$\Psi_0(r,z) = e^{-i\overbrace{\boxed{\frac{kr^2}{2q(z)}}}^{\in\Re}} e^{-i\,p(z)} \quad \Rightarrow \quad \Psi_0\Psi_0{}^* = e^{-i\left[p(z)-p^*(z)\right]}$$

nie zależy od *r* - sprzeczność

Ψ nie jest skoncentrowane w przestrzeni. A więc $\mathrm{Im}(q_0) \neq 0$. Można tak przesunąć 0 osi z aby $\mathrm{Re}\left[q(z=0)\right] = 0$. Ostatecznie:

zespolony Parametr Kogelnika: $\boxed{q(z) = z + i\,z_0\,, \quad z_0 \in \Re}$.

IV. Interpretacja Parametru Kogelnika:

Wstawmy postać funkcji $q(z)$ do wyrażenia na Ψ_0:

$$\Psi_0(r,z)=\exp\left[-i\frac{kr^2}{2(z+iz_0)}\right]\exp[-ip(z)]=$$

$$=\exp\left[-\underbrace{\boxed{\frac{kz_0}{2\left(z^2+z_0^2\right)}}}_{\frac{1}{w^2(z)}}r^2\right]\exp\left[-i\frac{k}{2}\underbrace{\boxed{\frac{z}{z^2+z_0^2}}}_{\frac{1}{R(z)}}r^2\right]\exp[-ip(z)]$$

Tak więc:

$$\frac{1}{w^2(z)}=\frac{k}{2}\mathrm{Im}\left[-\frac{1}{q(z)}\right]=\frac{k}{2}\left[\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right]\quad\Rightarrow\quad w^2(z)=\frac{2}{k}\frac{z^2+z_0^2}{z_0}$$

$$w^2(z)=\frac{2z_0}{k}\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]=w_0^2\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]\Rightarrow w(z=0)=w_0=\sqrt{\frac{2z_0}{k}}$$

$$R(z)=\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{q(z)}\right]\right\}^{-1}=\frac{z^2+z_0^2}{z}=z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]\Rightarrow R(z=0)=\infty$$

V. Wyznaczmy funkcję $p(z)$

$$p'(z)+\frac{i}{z+iz_0}=0\quad\Rightarrow\quad i\frac{dp(z)}{dz}=\frac{1}{z+iz_0}\qquad ip(z)=\int\frac{dz}{z+iz_0}=\ln(z+iz_0)+C$$

Ponieważ $p(z)$ jest fazą, przyjmijmy, że $p(z=0)=0$. Wówczas:

$$0=ip(z=0)=\ln(iz_0)+C\quad\Rightarrow\quad C=-\ln(iz_0)$$

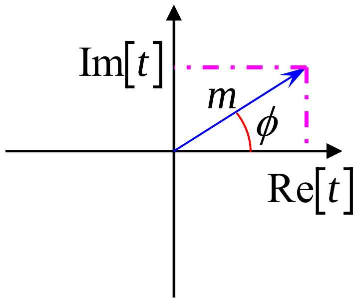
$$ip(z)=\ln\left[\frac{z+iz_0}{iz_0}\right]=\ln\left[1-i\frac{z}{z_0}\right]$$

$$e^{-ip(z)}=\frac{1}{1-i\dfrac{z}{z_0}}=\frac{1+i\dfrac{z}{z_0}}{1+\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^2}=m\cdot e^{i\phi}$$

$$t=m\,e^{i\phi}$$

$$m=\sqrt{\mathrm{Re}(t)^2+\mathrm{Im}(t)^2}$$

$$\phi=\arctan\left[\frac{\mathrm{Im}(t)}{\mathrm{Re}(t)}\right]$$



$$m=\sqrt{\left[\frac{1}{1+\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^2}\right]^2+\left[\frac{\dfrac{z}{z_0}}{1+\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^2}\right]^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^2}}=\frac{w_0}{w(z)}$$

$$\phi=\arctan\left[\frac{z}{z_0}\right]$$

VI. Kompletna postać wyrażenia na natężenie pola elektrycznego:

$$\boxed{E(r,z)=E_0\Psi_0(r,z)e^{-ikz}=E_0\frac{w_0}{w(z)}e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}}e^{-i\left[kz-\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)+\frac{k}{2}\frac{r^2}{R(z)}\right]}}$$

VII. Amplituda wiązki gaussowskiej

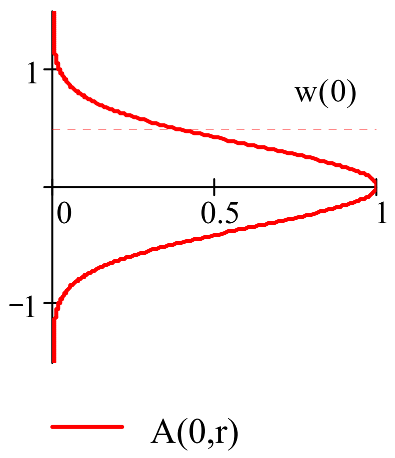
a) pole w przekroju wiązki zmienia się jak funkcja Gaussa
b) w odległości $w(z)$ od osi amplituda pola maleje e×, natężenie e^2×=7.4
c) dla $z = 0$ wiązka ma przewężenie o szerokości w_0
d) amplituda na osi wiązki maleje jak

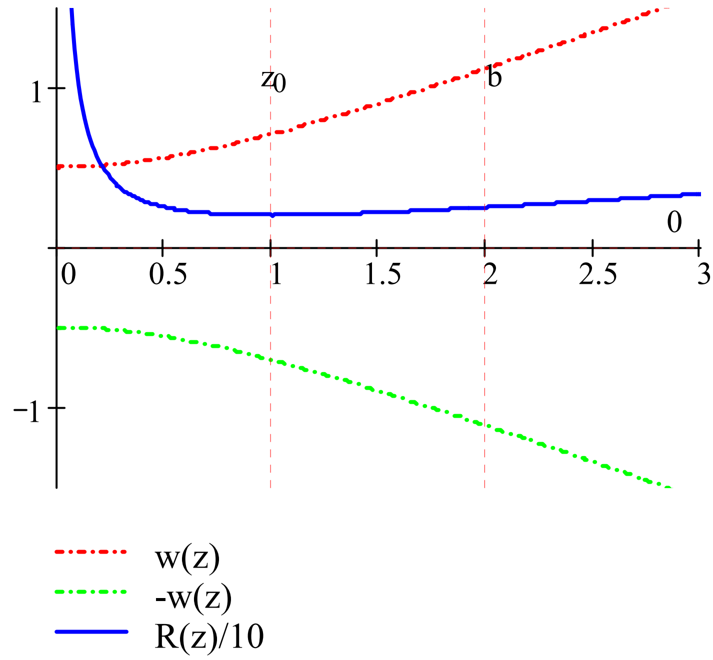
$$\frac{w_0}{w(z)}=\frac{1}{\sqrt{1+(z/z_0)^2}}:\quad 1\big|_{z=0}\to 0\big|_{z\to\infty}$$

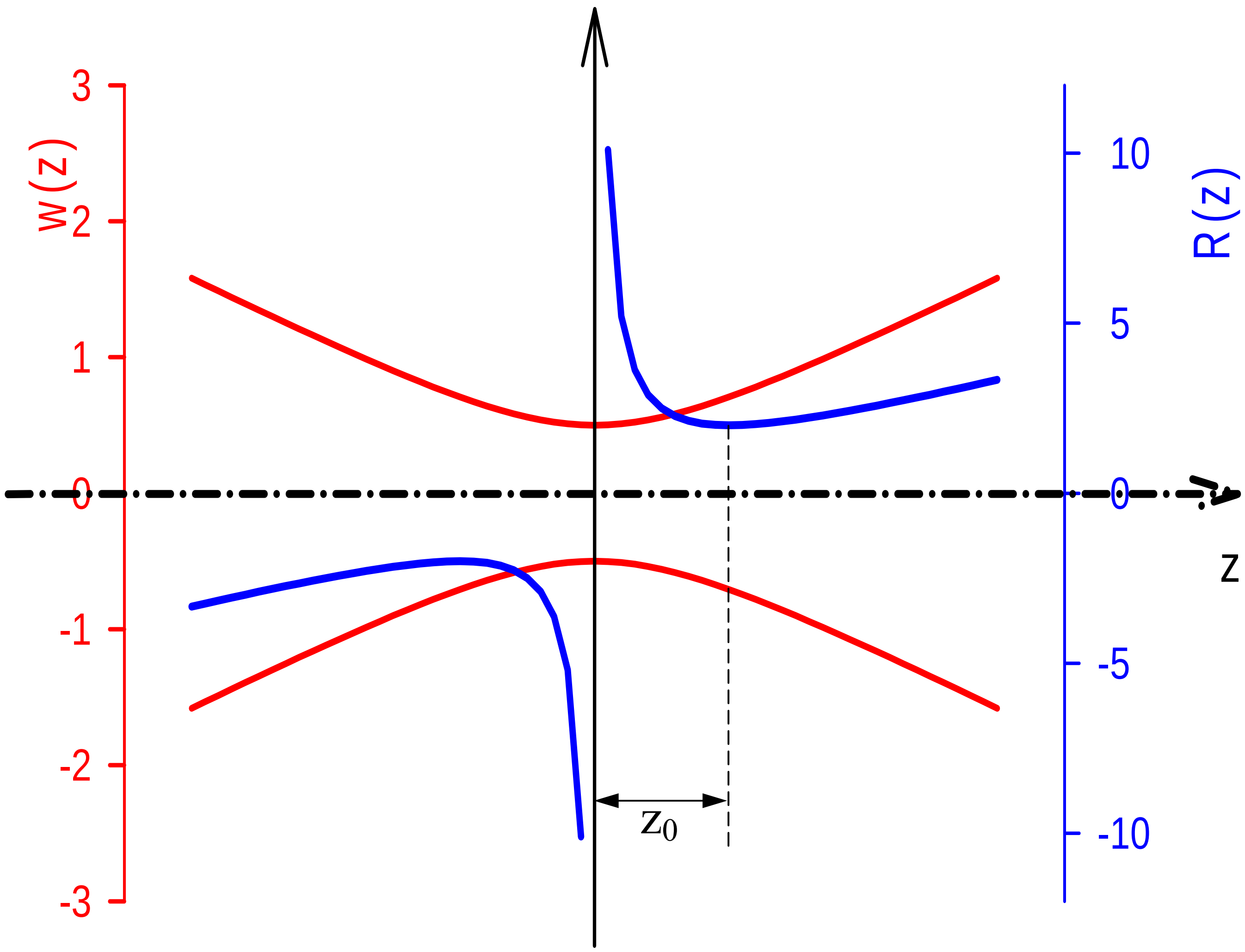
e) dla dużych z: $w(z)\to w_0\sqrt{(z/z_0)^2}=\dfrac{w_0}{z_0}z=\dfrac{\lambda_0}{n\pi w_0}z$

a więc: $\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{w(z\to\infty)}{z}=\dfrac{\lambda_0}{n\pi w_0}$ rozbieżność jak dla dyfrakcji

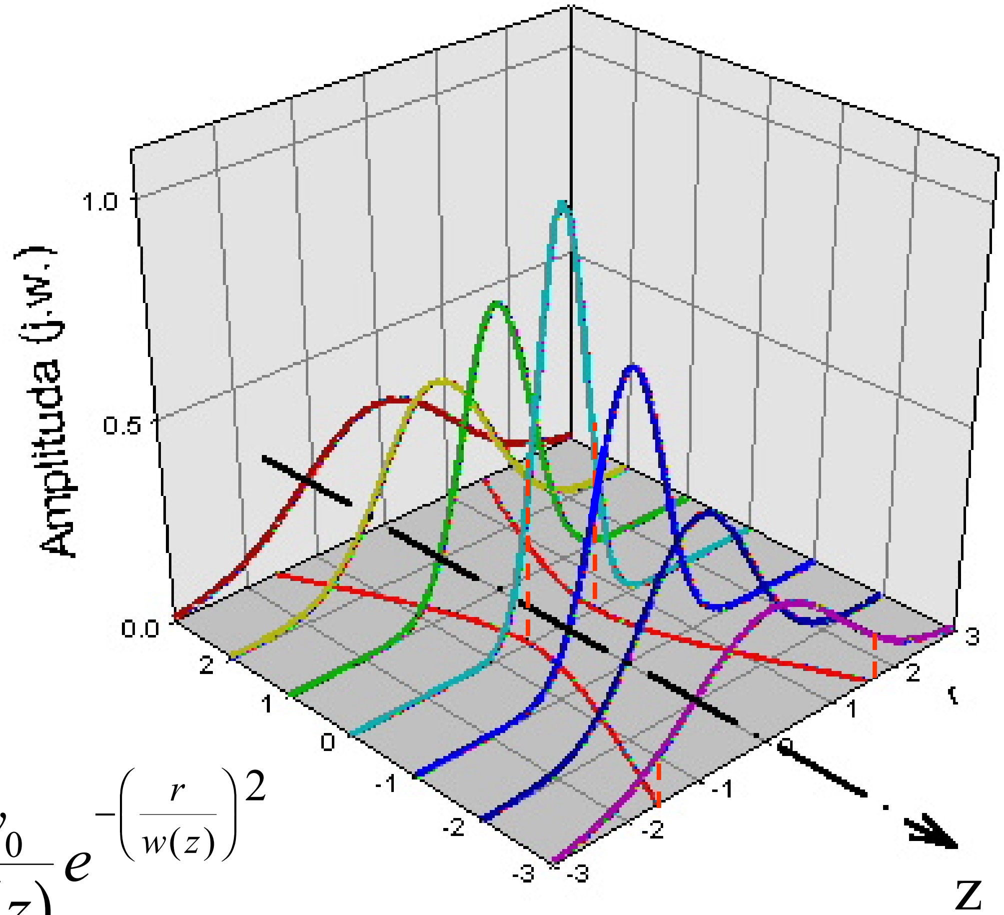
$w_0 = 0.5$ $z_0 = 1$ $k_0 = 8$ $\lambda_0 = 0.785$







Wiązka gaussowska, mod$_{00}$



$$A(z,r) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z / z_0)^2}$$

VIII. Faza wiązki gaussowskiej

$$e^{\underbrace{-i\left[kz-\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)\right]}_{\Phi_1}}\cdot e^{\underbrace{-i\frac{k}{2}\frac{r^2}{R(z)}}_{\Phi_2}}$$

Φ_1 – propagacja fazy w kierunku biegu fali (nie zależy od r)

cała funkcja zależna od czasu: $e(z,t)=e^{-i\Phi_1}\cdot e^{i\omega t}=e^{i\omega\left(t-\frac{\Phi_1}{\omega}\right)}=f\left(t-\frac{z}{v_p}\right)$

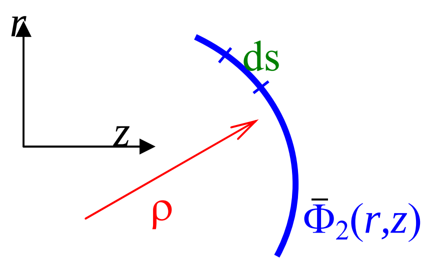
v_p jest prędkością fazową:

$$v_p=\omega\frac{z}{\Phi_1}=k\frac{c}{n}\frac{z}{kz-\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)}=\frac{\frac{c}{n}}{1-\frac{1}{kz}\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)}\rightarrow\begin{cases}\frac{c/n}{1-(kz_0)^{-1}} & \text{dla z}=0\\ >c/n & \\ c/n & \text{dla z}\rightarrow\infty\end{cases}$$

$\Phi_2\,(r=0)=0$

$\Phi_2\,(r>0)>0$ – faza fali spóźnia się dla z, $R>0$ – fala nie jest płaska.

Zbadajmy promień krzywizny przekroju powierzchni stałej fazy.



Zastosujmy wiedzę nt. promienia krzywizny.
Niech:
ds – element krzywej
$\vec{dL}$ – wersor styczny
ρ – promień krzywizny

$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{d\vec{L}}{ds}\right|$$

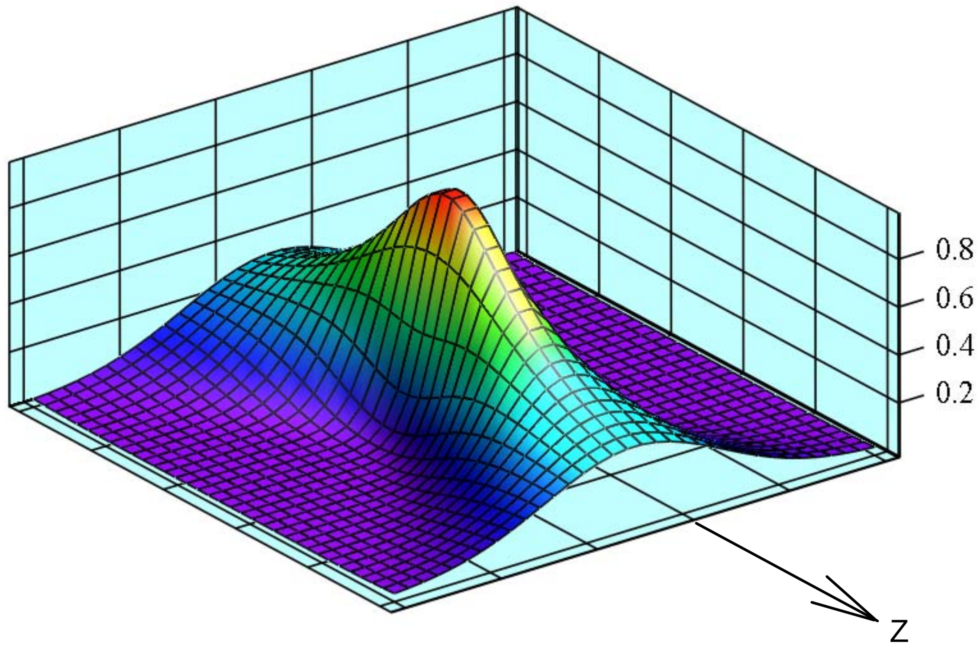
$$\bar{\Phi}_2(r,z)=z+\frac{1}{2}\frac{r^2}{R}=C(=const.)\qquad ds=\sqrt{dz^2+dr^2}=\sqrt{\frac{z-C-R/2}{z-C}}dz$$

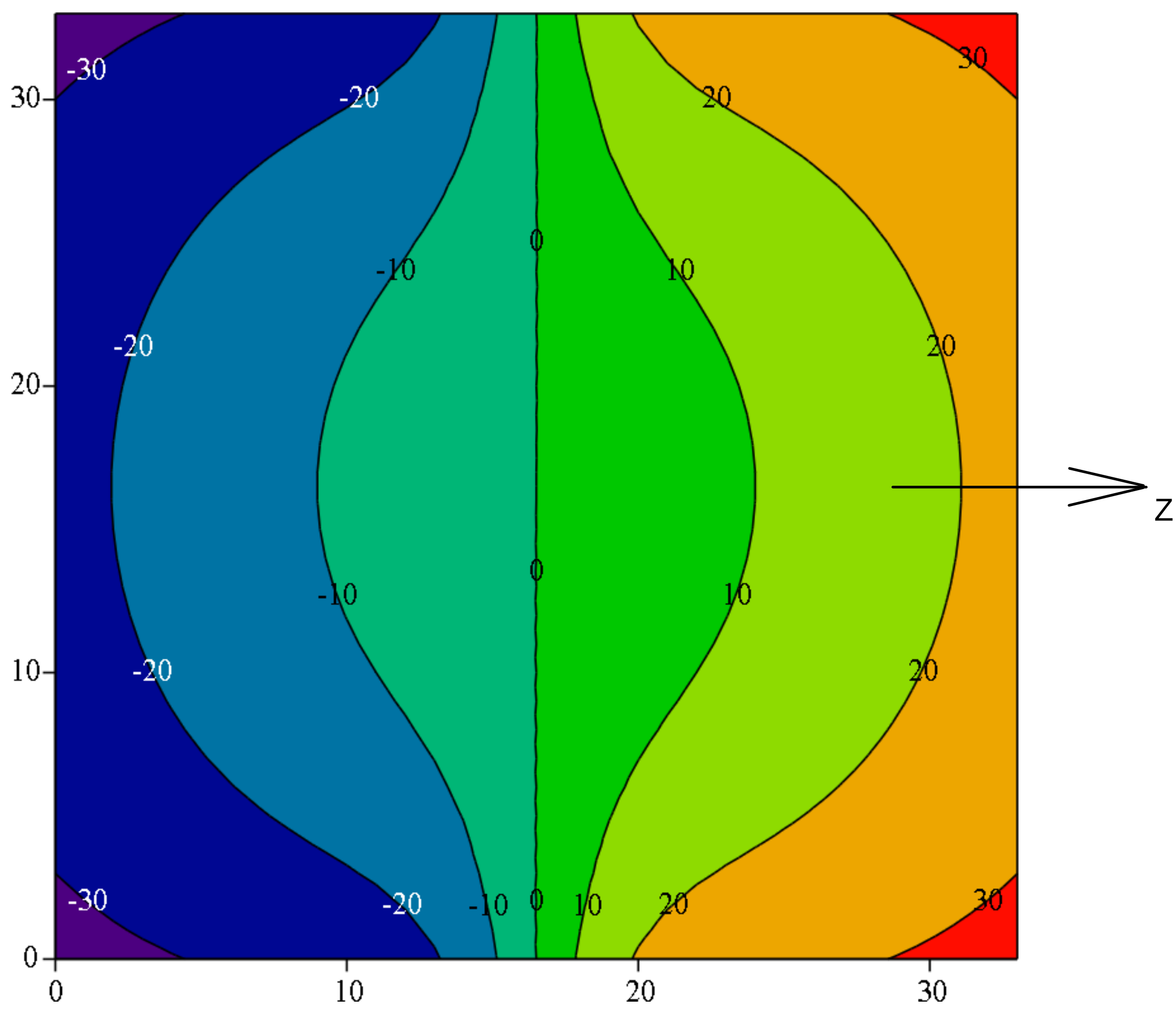
$$L_z=\frac{dz}{ds}=\sqrt{\frac{2C-2z}{2C-2z+R}};\qquad L_r=\frac{dr}{ds}\doteq-\sqrt{\frac{R}{2C-2z+R}};\qquad \left[spr.:\ L_z^2+L_r^2=1\right]$$

$$\left.\frac{1}{\rho}\right|_z=\frac{dL_z}{ds}=\frac{dL_z}{dz}\frac{dz}{ds}=-\frac{R}{(2C-2z+R)^2};\qquad \left.\frac{1}{\rho}\right|_r=\frac{dL_r}{ds}=\frac{dL_r}{dz}\frac{dz}{ds}=\left[\left.\frac{1}{\rho}\right|_z\right]\sqrt{\frac{2(C-z)}{R}}$$

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left[\left.\frac{1}{\rho}\right|_z\right]^2+\left[\left.\frac{1}{\rho}\right|_r\right]^2}=\sqrt{\frac{R}{(2C-2z+R)^3}}=\sqrt{\frac{R}{\left(r^2/R+R\right)^3}}\approx\frac{1}{R}\ \text{dla małych } r$$

Rozkład amplitudy wiązki gaussowskiej





Mapa fazy wiązki gaussowskiej