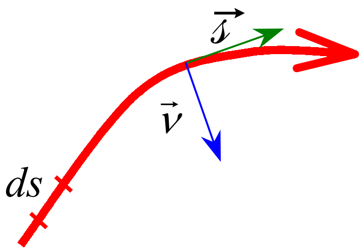
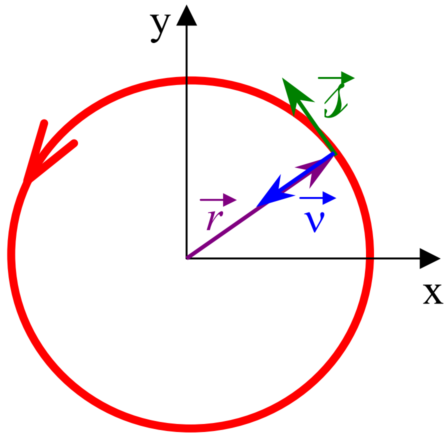
Wektor krzywizny promienia



Wprowadźmy oznaczenie: $\vec{K} \equiv \dfrac{d\vec{s}}{ds} \equiv \dfrac{1}{\rho}\vec{v}$

gdzie:
$\vec{K}$ - wektor krzywizny promienia, $\vec{v}$ - jego wersor
$\rho > 0$ - promień krzywizny.

Ponieważ: $0 = \dfrac{d}{ds}1 = \dfrac{d}{ds}(\vec{s}\cdot\vec{s}) = 2\vec{s}\cdot\dfrac{d\vec{s}}{ds} = 2\vec{s}\cdot\vec{K}$, to wersor $\vec{v}$ jest prostopadły do promienia światła.



Przykład:
Promien światła biegnie po okręgu o promieniu R:

$$r_x = R\cdot\cos\left(\frac{s}{R}\right), \qquad r_y = R\cdot\sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

$$s_x = \frac{dr_x}{ds} = -R\cdot\sin\left(\frac{s}{R}\right)\cdot\frac{1}{R} = -\sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

$$s_y = \frac{dr_y}{ds} = R\cdot\cos\left(\frac{s}{R}\right)\cdot\frac{1}{R} = \cos\left(\frac{s}{R}\right)$$

$$K_x = \frac{ds_x}{ds} = -\frac{1}{R}\cdot\cos\left(\frac{s}{R}\right), \quad K_y = \frac{ds_y}{ds} = -\frac{1}{R}\cdot\sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

$$\vec{s}\cdot\vec{K} \equiv 0$$

Na podstawie równania promienia mamy:

$$\nabla n = \frac{d}{ds}(n\vec{s}) = \frac{dn}{ds}\vec{s} + n\frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{dn}{ds}\vec{s} + n\vec{K}$$

Wniosek: ∇n leży w płaszczyźnie ugięcia promienia światła.

$$n\vec{K} = \nabla n - \frac{dn}{ds}\vec{s} \qquad \Big| \cdot \vec{K}$$

$$n\vec{K} \cdot \vec{K} = \vec{K} \cdot \nabla n - \frac{dn}{ds}\vec{s} \cdot \vec{K}$$

$$n\left|\vec{K}\right|^2 = \frac{1}{\rho}\vec{v}\nabla n - \frac{dn}{ds}\frac{1}{\rho}\vec{s} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{v} \cdot \nabla n$$

$$n\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\vec{v} \cdot \nabla n \qquad \Big| \cdot \frac{\rho}{n}$$

$$0 < \frac{1}{\rho} = \vec{v} \cdot \frac{1}{n}\nabla n = \vec{v} \cdot \nabla\left[\ln(n)\right]$$

Wniosek:

rzut $\nabla\left[\ln(n)\right]$ na kierunek $\vec{v}$ jest dodatni

$\Downarrow$

$\ln(n)$ rośnie w kierunku $\vec{v}$

$\Downarrow$

n rośnie w kierunku $\vec{v}$

$\Downarrow$

Promień światła załamuje się w kierunku większego n.