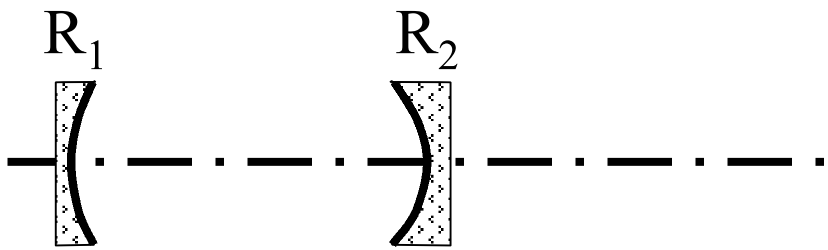
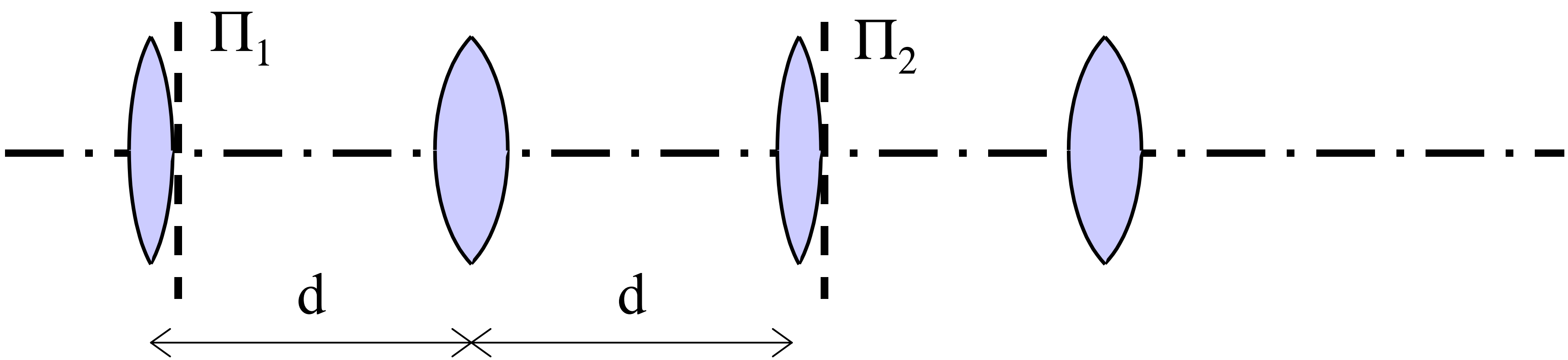
Model soczewkowy rezonatora



$$f = \frac{R}{2}$$



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{2d}{R_2} & d + d\left(1-\dfrac{2d}{R_2}\right) \\ -\dfrac{2}{R_1}-\dfrac{2}{R_2}\left(1-\dfrac{2d}{R_1}\right) & -\dfrac{2d}{R_1}+\left(1-\dfrac{2d}{R_1}\right)\left(1-\dfrac{2d}{R_2}\right) \end{bmatrix}$$

Warunek stabilności:

$$\left|\frac{A+D}{2}\right| \le 1 \qquad 0 \le \left(1-\frac{d}{R_1}\right)\cdot\left(1-\frac{d}{R_2}\right) \le 1$$

Warunek stabilności rezonatora

Macierz transformacji w zapisie umownym: (oznaczenie: $V_s = n_s \varphi_s$)

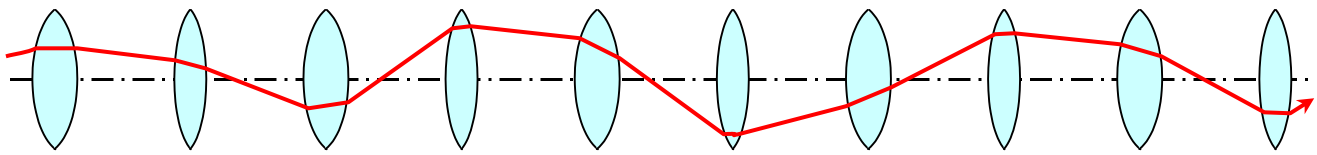
$$\begin{bmatrix} y_{s+1} \\ V_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_s \\ V_s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} V_s = \frac{1}{B}(y_{s+1} - A\,y_s) \\ V_{s+1} = C\,y_s + D V_s = C\,y_s + \frac{D}{B}(y_{s+1} - A\,y_s) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} y_{s+2} \\ V_{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{s+1} \\ V_{s+1} \end{bmatrix} \Rightarrow y_{s+2} = A\,y_{s+1} + B\,V_{s+1} = A\,y_{s+1} + B[\ldots]$$

Wstawiając tak, aby zredukować V uzyskujemy równanie rekurencyjne:

$$\boxed{y_{s+2} - 2\frac{A+D}{2}y_{s+1} + y_s = 0}$$

Poszukujemy rozwiązań stabilnych naszego problemu, to jest y_s ograniczonych dla dowolnego s.



Niech y_s będzie wartością funkcji $y(s)$ dla całkowitego s:

$$y(s) = y_0 \cdot \left(e^{i\theta}\right)^s = y_0 e^{i\theta s}; \quad \theta \in \Re \Rightarrow |y_s| = 1; \quad y_s + y_s^* \in \Re$$

Wstawmy do równania rekurencyjnego:

$$y_0\, e^{i(s+2)\theta} - 2\frac{A+D}{2} y_0\, e^{i(s+1)\theta} + y_0\, e^{is\theta} = \left[e^{i2\theta} - 2\frac{A+D}{2}e^{i\theta} + 1 \right] \cdot y_0\, e^{is\theta} = 0$$

Istotne rozwiązania (dla $y_0 \neq 0$) uzyskamy dla [...] = 0.

PRZYPADEK 1: $\frac{A+D}{2} \neq 1$

$$[\cos\theta + i\sin\theta =]\, e^{i\theta} = \frac{A+D}{2} \pm i\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2} \quad \theta \in \Re \quad \text{o ile} \ \sqrt{\ldots} \in \Re$$

tak więc: $1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 > 0$ albo $\left|\frac{A+D}{2}\right| < 1$

PRZYPADEK 2: $\left|\frac{A+D}{2}\right| = 1$

$$\left[e^{i\theta} \pm 1\right]^2 \cdot y_0\, e^{is\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i\theta} \pm 1 = 0$$

tak więc: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} = \mp 1 \Rightarrow \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$ To też jest rozwiązanie ograniczone (bo θ jest stałe).

Tak więc ostatecznie:

$$\left|\frac{A+D}{2}\right| \leq 1 \quad \text{albo} \quad 0 \leq \frac{A+D+2}{4} \leq 1$$

Wstawiając na koniec konkretną postać współczynników A i D:

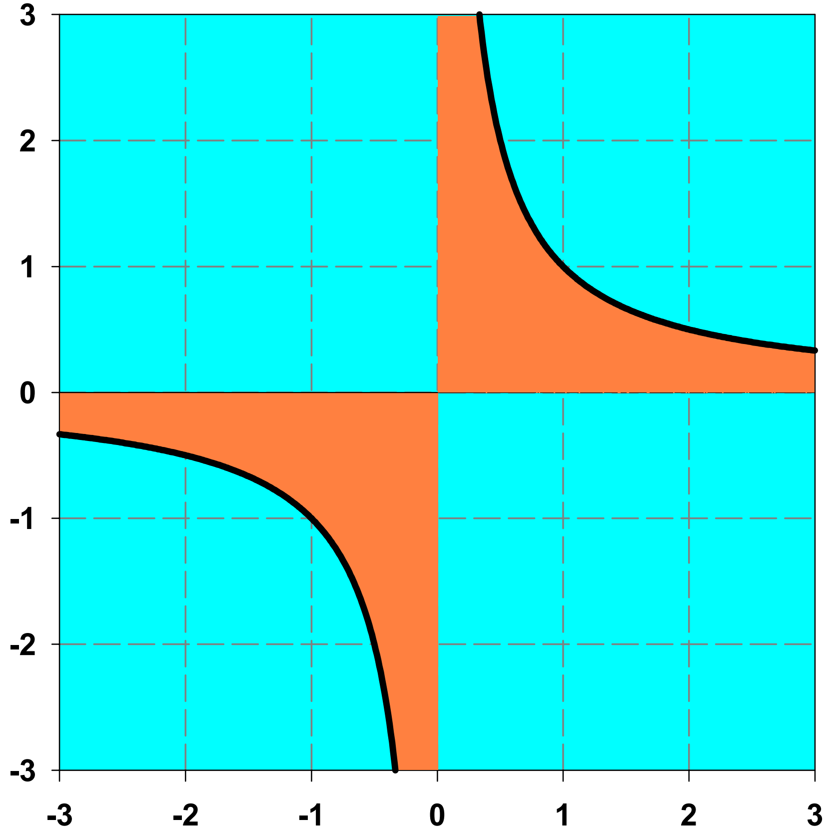
$$0 \leq \frac{1}{4}(A+D+2) = \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{d}{f_2}\right) + \left(1-\frac{d}{f_1}\right)\left(1-\frac{d}{f_2}\right) - \frac{d}{f_1} + 2\right] =$$
$$= \left(1-\frac{d}{2f_1}\right)\cdot\left(1-\frac{d}{2f_2}\right) \leq 1$$

Albo dla zwierciadeł:

$$\boxed{0 \leq \left(1-\frac{d}{R_1}\right)\cdot\left(1-\frac{d}{R_2}\right) \leq 1}$$

Diagram stabilności rezonatora

$$g_2 = 1 - \frac{d}{R_2}$$



$$g_1 = 1 - \frac{d}{R_1}$$

Obszar stabilności

$$0 \le g_1 \cdot g_2 \le 1$$