Twierdzenie Kogelnika

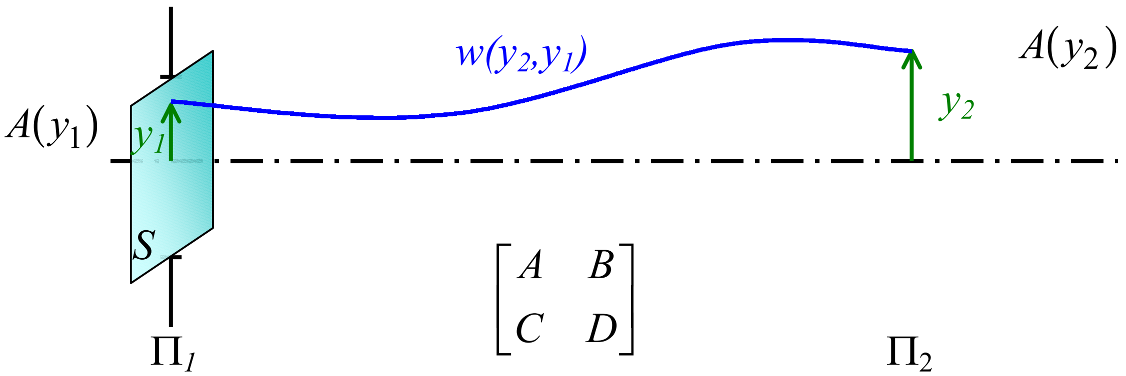
Wydzielmy w wyrażeniu na pole wiązki gaussowskiej to, co zależy od r:

$$E(r,z) = E_0 \cdot \boxed{e^{-i\frac{kr^2}{2q(z)}}} \cdot \frac{w_0}{w(z)} e^{-i(kz - \arctan z/z_0)}$$

Zbadajmy, jak zespolona amplituda (amplituda skalarna + faza) jest przekształcana przez układ optyczny opisany macierzą [ABCD].
Potrzebne będzie równanie dyfrakcji Huygensa-Fresnela:

$$A(y_2) = \alpha \iint\limits_S A(y_1) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \frac{w(y_2, y_1)}{\lambda_0}} dS \cong \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(y_1) \cdot e^{-i \cdot k_0 [J(y_2) - J(y_1)]} dy_1$$

gdzie A jest *amplitudą skalarną* pewnego pola koherentnego w płaszczyźnie S



1. Niech w płaszczyźnie wejściowej zespolona amplituda pola będzie jak
2. Drogę optyczną wyznaczymy z twierdzenia o transformacji eikonału:

$$J(y_2) - J(y_1) = K + \frac{Ay_1^2 + Dy_2^2 - 2y_1 y_2}{2B}$$

Wstawiając do równania dyfrakcji $[q(y_1) = q_1 \,,\; k = k_0 n]$:

$$A(y_2) = \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \frac{(k_0 n_1) y_1^2}{2q_1} - ik_0 \left(K + \frac{Ay_1^2 + Dy_2^2 - 2y_1 y_2}{2B} \right)\right] dy_1$$

Wyłączmy przed całkę to wszystko, co nie zależy od y_1:

$$A(y_2) = \underbrace{\boxed{\alpha \cdot \exp[-ik_0 K]}}_{\alpha'} \cdot \exp\left[-ik_0 \frac{D}{2B} y_2^2\right] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \frac{k_0}{2} \left(\frac{1}{q_1/n_1} + \frac{A}{B} \right) y_1^2 + ik_0 \frac{y_2}{B} y_1 \right] dy_1$$

Całkę obliczymy korzystając z tablicy transformat Fouriera:

$$\mathscr{F}\left(e^{-\beta t^2}\right)=\sqrt{\pi/\beta}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \quad \text{albo:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} e^{-i\omega t} dt=\sqrt{\pi/\beta}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$$

Aby zastosować tę całkę konieczne są więc podstawienia:

$$t\equiv y_1\,; \quad \beta\equiv i\frac{k_0}{2}\left(\frac{n_1}{q_1}+\frac{A}{B}\right); \quad \omega\equiv -k_0\frac{y_2}{B}$$

Wstawiając, uzyskujemy po przekształceniach:

$$A(y_2)=\alpha'\cdot\exp\left[-ik_0\frac{D}{2B}y_2^2\right]\sqrt{\frac{\pi}{i\frac{k_0}{2}\left(\frac{n_1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)}}\,\exp\left[-\frac{k_0^2y_2^2}{B^2}\frac{1}{4i\frac{k_0}{2}\left(\frac{n_1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)}\right]=$$

$$=\alpha''\cdot\exp\left[-ik_0\left(\frac{D}{2B}-\frac{1}{2B^2\left(\frac{n_1}{q_1}+\frac{A}{B}\right)}\right)y_2^2\right]=\ldots=\alpha''\cdot\exp\left[-i\frac{k}{n_2}\frac{1}{2\frac{Aq_1+Bn_1}{Cq_1+Dn_1}}y_2^2\right]$$

Ostatnie wyrażenie ma postać zespolonej amplitudy wiązki gaussowskiej. Tak więc:

$$A(y_2)=\alpha''\cdot\exp\left[-ik\frac{y_2^2}{2q_2}\right] \quad \text{czyli} \quad q_2=n_2\frac{Aq_1+Bn_1}{Cq_1+Dn_1} \quad \text{albo} \quad \boxed{\frac{q_2}{n_2}=\frac{A\frac{q_1}{n_1}+B}{C\frac{q_1}{n_1}+D}}$$