Równanie wektorowe dla promieni światła

Do wyprowadzenia potrzebne będą dwa twierdzenia:

1.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\cdot\nabla=\left(\hat{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial s}\right)\cdot\left(\hat{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\hat{x}_j\hat{x}_i\frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}=\delta_{i,j}\frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{d}{ds}$$

$\{i,j=1\ldots3\}$, obowiązuje konwencja sumacyjna

2. Zbadajmy składową x wyrażenia:

$$\nabla\left[(\nabla f)^2\right]=\mathrm{grad}\left[(\mathrm{grad}\,f)^2\right]\quad\rightarrow\ \text{wektor},\quad (f\text{ - skalar})$$

$$\left\{\nabla\left[(\nabla f)^2\right]\right\}_x=\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nabla f)^2\right]=2\cdot\nabla f\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\nabla f)=2\cdot\nabla f\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\hat{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\hat{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\hat{z}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)=2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial x}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial x}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]=$$

$$=2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]=2\cdot[\nabla f]_x\cdot\nabla^2(f)$$

Tak więc: $$\nabla\left[(\nabla f)^2\right]=2\cdot(\nabla f)\cdot\nabla^2(f)\equiv 2\cdot(\nabla f)\cdot\nabla(\nabla f)$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Mamy też: $$n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\equiv n(\vec{r})\vec{s}=\nabla J(\vec{r})$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Obliczmy:

$$\frac{d}{ds}\left[n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right]=\frac{d}{ds}\left[\nabla J(\vec{r})\right]\overset{(1)}{=}\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\nabla\left[\nabla J(\vec{r})\right]=\frac{1}{n(\vec{r})}\nabla J(\vec{r})\cdot\nabla\left[\nabla J(\vec{r})\right]=$$

$$\overset{(2)}{=}\frac{1}{n(\vec{r})}\cdot\frac{1}{2}\nabla\left[(\nabla J(\vec{r}))^2\right]=\frac{1}{n(\vec{r})}\cdot\frac{1}{2}\cdot\nabla\left[n(\vec{r})\vec{s}\,n(\vec{r})\vec{s}\right]=\frac{1}{n(\vec{r})}\cdot\frac{1}{2}\cdot\nabla\left[(n(\vec{r}))^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n(\vec{r})}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot n(\vec{r})\cdot\nabla\left[n(\vec{r})\right]=\nabla\left[n(\vec{r})\right]=\mathrm{grad}\left[n(\vec{r})\right]$$

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left[n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right]=\frac{d}{ds}\left[n(\vec{r})\vec{s}\right]=\mathrm{grad}\left[n(\vec{r})\right]}$$

Przykłady zastosowań

1. Ośrodek jednorodny: $n = \text{const.}$

$$\frac{d}{ds}\left[n\frac{d\vec{r}}{ds}\right] = n\frac{d}{ds}\left[\frac{d\vec{r}}{ds}\right] = n\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \operatorname{grad}(n) = 0$$

czyli: $$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{ds}\left[\equiv n\vec{s}\right] = \text{const.} \quad \Rightarrow \vec{r} = (n\vec{s})s + \vec{B}$$

Równanie prostej w kierunku $\vec{s}$ i przechodzącej przez punkt $\vec{B}$.

2. Współczynnik załamania zmienia się tylko w jednym kierunku,
   np. $n(\vec{r}) = n(y)$:

Niech wektor $\vec{r}$ od początku układu współrzędnych do promienia ma współrzędne *X(s), Y(s) i Z(s)*. Celem obliczeń jest wyznaczenie tych funkcji. Oczywiście współczynnik załamania w miejscu promienia jest *n(Y)*.

Wypisujemy równanie promienia po składowych:

$$\frac{d}{ds}\left[n(Y)s_x\right] = \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad n(Y)s_x = C_1 \Rightarrow s_x(Y) = \frac{C_1}{n(Y)}$$

$$\frac{d}{ds}\left[n(Y)\frac{dY}{ds}\right] = n'(Y)\left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + n(Y)\frac{d^2Y}{ds^2} = \left.\frac{\partial n}{\partial y}\right|_Y = n'(Y) \neq 0 \quad \leftarrow \text{można obliczyć}$$

$$\frac{d}{ds}\left[n(Y)s_z\right] = \frac{\partial n}{\partial z} = 0 \Rightarrow n(Y)s_z = C_2 \Rightarrow s_z(Y) = \frac{C_2}{n(Y)}$$

- Najpierw rozwiązujemy równanie drugie (analitycznie lub numerycznie), wstawiając daną postać $n(Y)$ i warunki początkowe. Wynikiem będzie funkcja $Y(s)$ oraz jej pochodna $s_y(s)$.
- Dalej, dla uproszczenia obliczeń, można na przykład tak dobrać układ współrzędnych, aby dla $s = 0$ wersor promienia nie miał składowej w kierunku *z*: $s_z(s=0) = 0$. Wówczas, na podstawie równania trzeciego $C_2 = 0$, bo zawsze $n > 0$. Ponieważ $\vec{s}$ jest wersorem, to $s_x = \sqrt{1 - s_y^2}$. Znając $s_x(s)$ oraz $s_y(s)$ można przez proste całkowanie z warunkami początkowymi wyznaczyć $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s) = Z_0$, co daje trajektorię promienia w postaci parametrycznej.