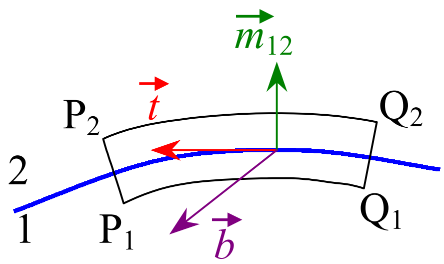
Prawo załamania na granicy dwu ośrodków

Ponieważ dla dowolnego f: $rot\left[grad(f)\right] \equiv \nabla \times \left[\nabla f\right] \equiv 0$, to

$$\nabla \times \left[\nabla J\right] = \nabla \times \left[n\vec{\mathcal{J}}\right] \equiv 0,$$ albo z tw. Stokes'a:

$$0 = \int_S \nabla \times \left(n\vec{\mathcal{J}}\right)\cdot \vec{b}\, dS = \oint_L n\vec{\mathcal{J}}\, d\vec{l}$$



Wektor $\vec{m}_{12}$ jest prostopadły do powierzchni rozdziału ośrodków.
Wektor $\vec{t}$ jest styczny do powierzchni rozdziału.
Wektor $\vec{b}$ jest normalny do powierzchni ograniczonej krzywą $P_1Q_1P_2Q_2$.

$$\vec{t} = \vec{b} \times \vec{m}_{12}$$

Tak więc: $$0 = \oint_{P_1Q_1P_2Q_2} n\vec{\mathcal{J}}\, d\vec{l} = \int_{P_1}^{Q_1} n\vec{\mathcal{J}}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{Q_2}^{P_2} n\vec{\mathcal{J}}_2 \cdot d\vec{l} = \ldots$$

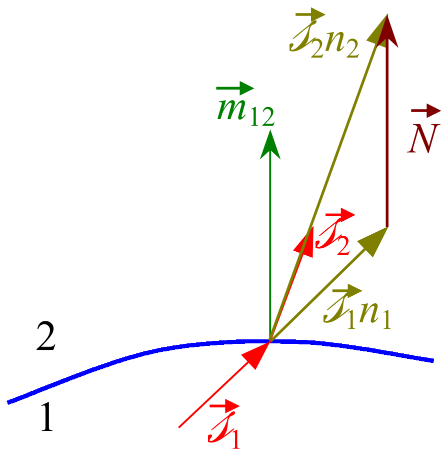
ponieważ odcinki Q_1Q_2 i P_2P_1 można uczynić dowolnie małymi.
Niech $d\vec{l} = \vec{t}\, dl$. Wówczas:

$$\ldots = \int_{P_1=P_2}^{Q_1=Q_2} \left[n_2\vec{\mathcal{J}}_2 \cdot \vec{t} - n_1\vec{\mathcal{J}}_1 \cdot \vec{t}\right] dl = \int_{P_1=P_2}^{Q_1=Q_2} \left[n_2\vec{\mathcal{J}}_2 - n_1\vec{\mathcal{J}}_1\right]\cdot \vec{t}\, dl = \int_{P_1=P_2}^{Q_1=Q_2} \left[n_2\vec{\mathcal{J}}_2 - n_1\vec{\mathcal{J}}_1\right]\cdot \left(\vec{b} \times \vec{m}_{12}\right) dl =$$

$$= \int_{P_1=P_2}^{Q_1=Q_2} \vec{b} \cdot \left[\vec{m}_{12} \times (n_2\vec{\mathcal{J}}_2 - n_1\vec{\mathcal{J}}_1)\right]\cdot dl = 0$$

Powierzchnia ograniczona krzywą $P_1Q_1P_2Q_2$ została wybrana dowolnie. Stąd:

$$\boxed{\vec{m}_{12} \times (n_2\vec{\mathcal{J}}_2 - n_1\vec{\mathcal{J}}_1) = \vec{m}_{12} \times \vec{N} = 0}$$



Wnioski:

1. $\vec{N} \parallel \vec{m}_{12} \Rightarrow \vec{N} \perp$ do powierzchni rozdziału ośrodków
2. $n_2(\vec{m}_{12} \times \vec{\mathcal{J}}_2) = n_1(\vec{m}_{12} \times \vec{\mathcal{J}}_1)$, czyli:
   $$n_2 \cdot \sin(\alpha_2) = n_1 \cdot \sin(\alpha_1)$$
3. odbicie:
   $$\vec{N} = \vec{\mathcal{J}}_2 - \vec{\mathcal{J}}_1,$$
   $$\sin(\alpha_2) = \sin(\alpha_1) \Rightarrow \alpha_2 = \begin{cases} \alpha_1 \\ \pi - \alpha_1 \end{cases}$$