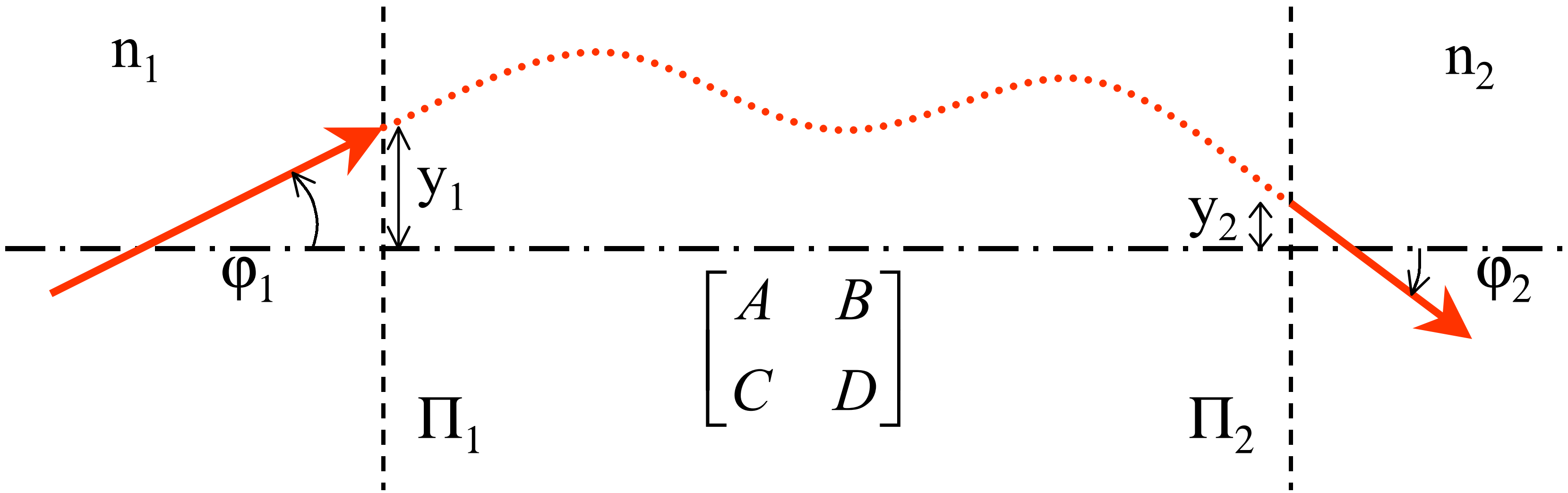
Optyka macierzowa



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

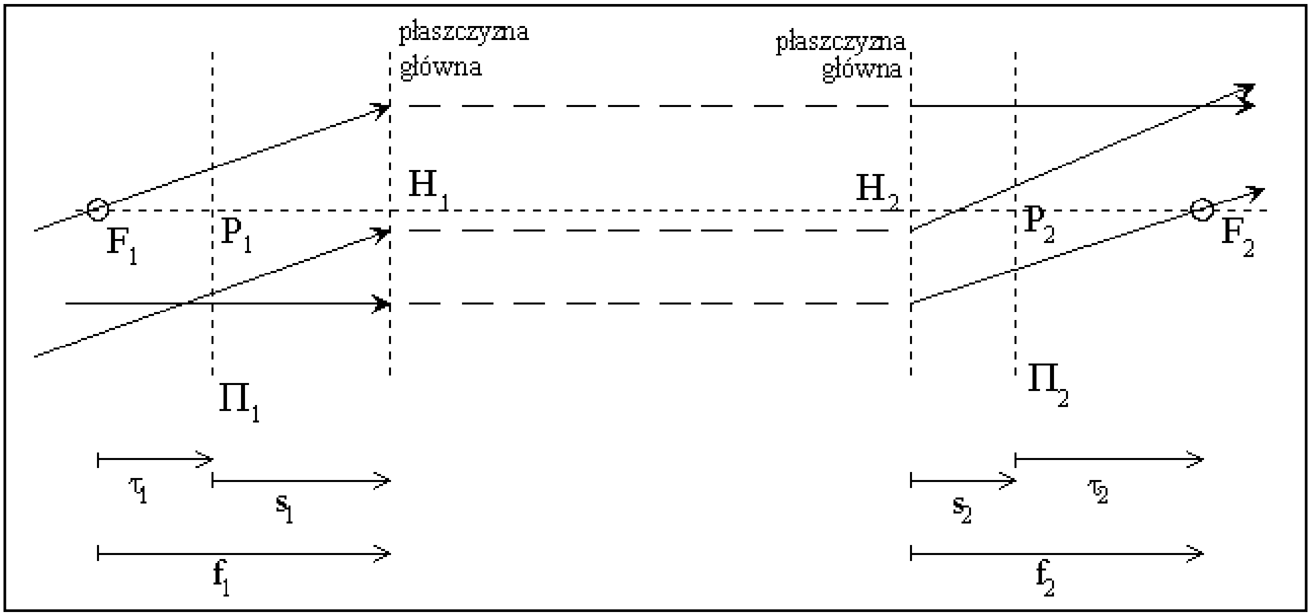
$$\begin{bmatrix} y_2 \\ n_2\varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ n_1\varphi_1 \end{bmatrix}$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia i umowę co do znaków odległości w układzie optycznym:

ogniskowe: $f_1 = \overrightarrow{F_1H_1} \quad f_2 = \overrightarrow{H_2F_2}$

położenie płaszczyzn głównych: $s_1 = \overrightarrow{\Pi_1 H_1} \quad s_2 = \overrightarrow{H_2\Pi_2}$

położenie ognisk: $\tau_1 = \overrightarrow{F_1\Pi_1} \quad \tau_2 = \overrightarrow{\Pi_2 F_2}$



Przykładowe rozmieszczenie podstawowych punktów odwzorowania. Dla takiego układu płaszczyzn **wszystkie odległości są dodatnie**.

Można wyznaczyć związki pomiędzy położeniem punktów kardynalnych a współczynnikami [ABCD]:

$$s_1 = n_1\frac{D-1}{C}; \quad \tau_1 = -n_1\frac{D}{C}; \quad f_1 = \tau_1 + s_1 = -n_1\frac{1}{C}$$

oraz

$$s_2 = n_2\frac{A-1}{C}; \quad \tau_2 = -n_2\frac{A}{C}; \quad f_2 = \tau_2 + s_2 = -n_2\frac{1}{C}$$

Szczególne znaczenie mają tak rozmieszczone płaszczyzny P_1 i P_2 , że pewne elementy macierzy [ABCD] się zerują:

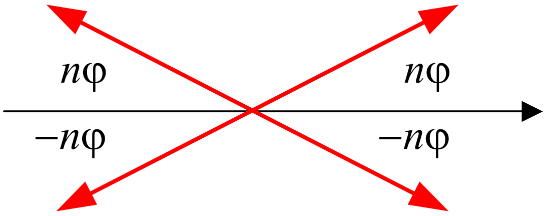
- A=0 oznacza, że płaszczyzna P_2 jest drugą płaszczyzną ogniskową
- B=0 oznacza, że płaszczyzna P_2 jest obrazem płaszczyzny P_1 (przedmiotowej). Inaczej mówiąc przedmiot umieszczony w płaszczyźnie P_1 ma ostry obraz w płaszczyźnie P_2 . A jest powiększeniem liniowym układu.
- C=0 oznacza, że układ przekształca wiązkę równoległą na wiązkę równoległą. Taki układ nazywamy afokalnym lub teleskopowym, D jest powiększeniem kątowym tego układu.
- D=0 oznacza, że płaszczyzna P_1 jest pierwszą płaszczyzną ogniskową.

Optyka macierzowa – odwracalność promienia

Zasada: trajektoria promienia nie zależy od kierunku biegu światła.

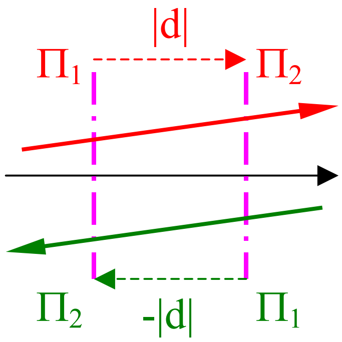
Jak to się realizuje w formalizmie optyki macierzowej?

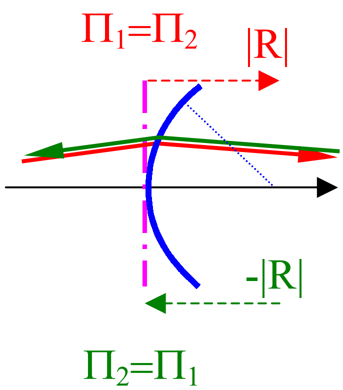
- odległości są dodatnie w kierunku $+z$
- kąt zredukowany $n\varphi$ ma własności **sinusa** kąta pomiędzy kierunkiem $+z$ a promieniem:



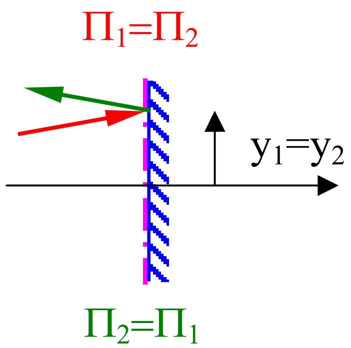
- współczynnik załamania jest **ujemny** dla promienia biegnącego w lewo

Przykłady:



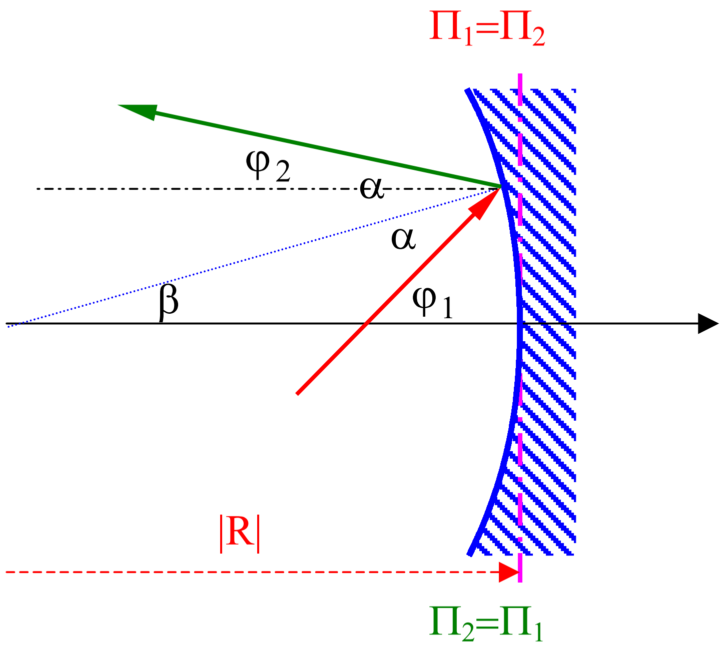


w prawo	w lewo
$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\lvert d\rvert}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & \frac{-\lvert d\rvert}{-n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lvert d\rvert}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n_1}{\lvert R\rvert} & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{-n_1-(-n_2)}{-(-\lvert R\rvert)} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n_1}{\lvert R\rvert} & 1 \end{vmatrix}$



Zwierciadło płaskie

$$\begin{matrix} y_1 = y_2 \\ n\varphi_1 = n\varphi_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Zwierciadło kuliste:

$$\beta = \frac{y_1}{R} > 0, \quad y_2 = y_1$$

$$\varphi_1 = \alpha + \beta; \quad \varphi_2 + \beta = \alpha$$

$$\varphi_2 + \beta = \alpha = \varphi_1 - \beta$$

$$\varphi_2 = -2\beta + \varphi_1 \qquad |\cdot n$$

$$\varphi_2 \cdot n = -2\beta\, n + \varphi_1 . n$$

$$\begin{vmatrix} y_2 \\ \varphi_2 \cdot n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \cdot n \end{vmatrix}$$

Uwagi:

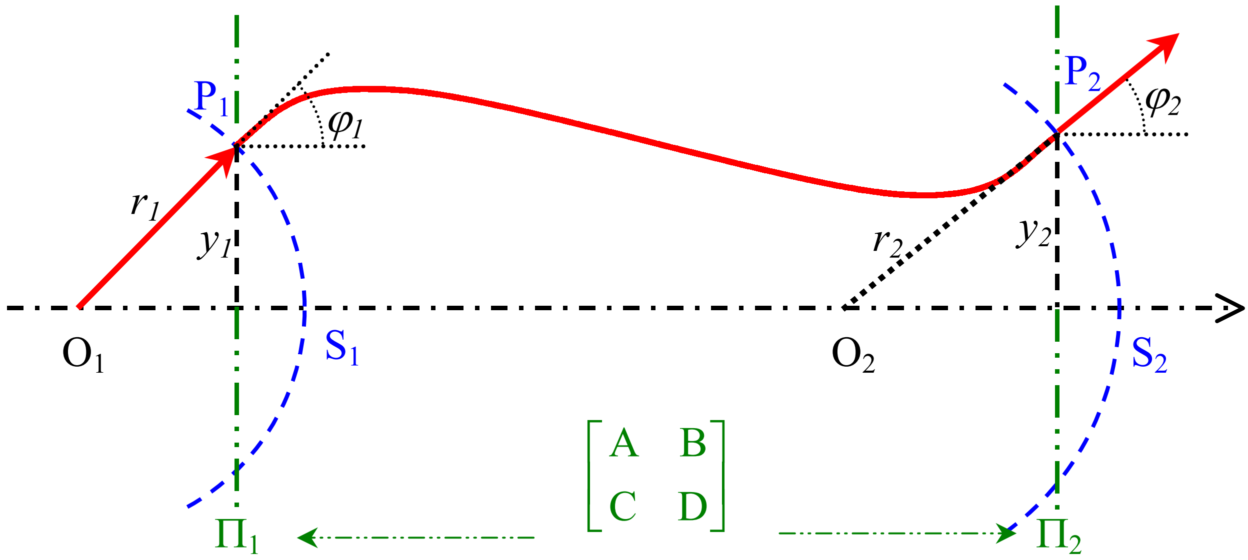
1. wszystkie kąty > 0 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara
2. R>0 jeżeli środek krzywizny leży od strony podania światła
3. jeżeli światło pada z prawej strony na zwierciadło wklęsłe (dla światła) to:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2(-n)}{-R} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{vmatrix}$$

zwierciadło jest więc równoważne soczewce o ogniskowej $f = \dfrac{R}{2n}$

Kulisty front falowy w ośrodku [ABCD]

Fala kulista P_2S_2 o środku w O_2 jest obrazem fali kulistej P_1S_1 o środku w O_1



Najpierw zdefiniujmy promienie zredukowane R_i obu fal kulistych:

$$\boxed{R_{1,2} \equiv \frac{r_{1,2}}{n_{1,2}}}$$

Mamy też wprost z rysunku dla promieni przyosiowych:

$$r_{1,2} = \frac{y_{1,2}}{\varphi_{1,2}} \text{ , a więc: } \quad R_{1,2} = \frac{y_{1,2}}{n_{1,2} \cdot \varphi_{1,2}} \text{ .}$$

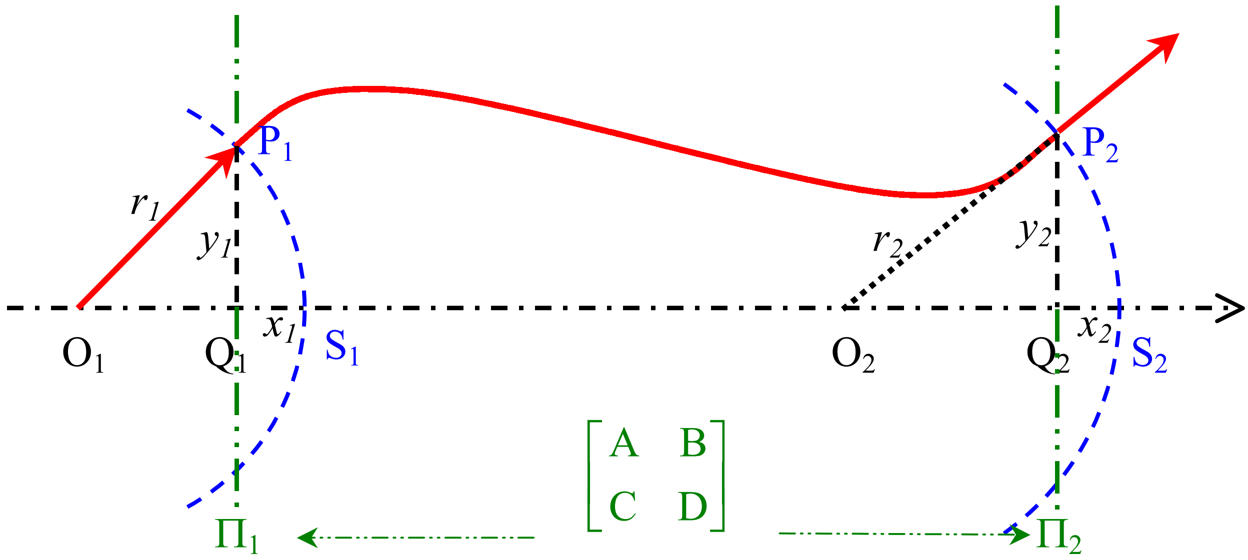
Stosując przekształcenie [ABCD] do y_2 i φ_2 uzyskamy:

$$R_2 = \frac{y_2}{n_2\varphi_2} = \frac{Ay_1 + Bn_1\varphi_1}{Cy_1 + Dn_1\varphi_1} = \frac{A\frac{y_1}{n_1\varphi_1} + B}{C\frac{y_1}{n_1\varphi_1} + D}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}}$$

Droga optyczna w ośrodku [ABCD]

Fala kulista P_2S_2 o środku w O_2 jest obrazem fali kulistej P_1S_1 o środku w O_1

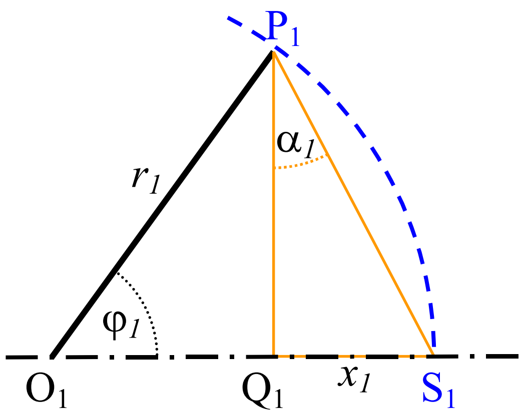


Najpierw wyznaczmy promienie zredukowane obu fal kulistych:

$$y_2 = Ay_1 + Bn_1\varphi_1 \Rightarrow n_1\varphi_1 = \frac{y_2 - Ay_1}{B} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{r_1}{n_1} = \frac{y_1/\varphi_1}{n_1} = \frac{By_1}{y_2 - Ay_1}$$

$$n_2\varphi_2 = Cy_1 + Dn_1\varphi_1 = Cy_1 + D\frac{y_2 - Ay_1}{B} = \frac{Dy_2 - y_1}{B} \Rightarrow R_2 = \frac{y_2/\varphi_2}{n_2} = \frac{By_2}{Dy_2 - y_1}$$

Wyznaczmy też długości odcinków x_1 i x_2 :



$\Delta O_1P_1S_1$ jest równoramienny:

$$\sphericalangle\, O_1S_1P_1 = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_1) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle\, O_1S_1P_1 = \frac{\varphi_1}{2}$$

a więc:

$$x_1 = \alpha_1 \cdot y_1 = \frac{\varphi_1}{2} \cdot y_1 = \frac{1}{2}\frac{y_1}{r_1}y_1 = \frac{y_1^2}{2r_1}$$

$$x_2 = \frac{y_2^2}{2r_2}$$

Oznaczmy przez K drogę optyczną od Q_1 do Q_2 liczoną wzdłuż osi z:

$$K = w[Q_1, Q_2] = \int_{Q_1}^{Q_2} n\,dz$$

Na mocy Twierdzenia Fermata wszystkie drogi optyczne od O_1 do P_2 są takie same ponieważ są minimalne:

$$w[O_1 P_1 P_2] = w[O_1 O_2 P_2]$$

Ponieważ punkty P_2 i S_2 leżą na tym samym froncie falowym, drogę optyczną $w[O_2 P_2]$ można zastąpić drogą optyczną $w[O_2 S_2]$. Tak więc:

$$w[O_1 P_1 P_2] = w[O_1 O_2 S_2]$$

Łącząc oba te fakty otrzymujemy:

$$w[O_1 P_1] + w[P_1 P_2] = w[O_1 Q_1] + w[Q_1 Q_2] + w[Q_2 S_2]$$

$$w[P_1, P_2] = -w[O_1, S_1] + w[O_1, Q_1] + w[Q_1, Q_2] + w[Q_2, S_2]$$

$$w[P_1, P_2] = -w[Q_1, S_1] + w[Q_1, Q_2] + w[Q_2, S_2]$$

$$w[P_1, P_2] = -x_1 n_1 + K + x_2 n_2 =$$

$$= K - n_1 \frac{y_1^2}{2r_1} + n_2 \frac{y_2^2}{2r_2} = K - \frac{y_1^2}{2\frac{r_1}{n_1}} + \frac{y_2^2}{2\frac{r_2}{n_2}} = K - \frac{y_1^2}{2R_1} + \frac{y_2^2}{2R_2} =$$

$$= K - \frac{y_1^2}{2\frac{By_1}{y_2 - Ay_1}} + \frac{y_2^2}{2\frac{By_2}{Dy_2 - y_1}} = K + \frac{-y_1(y_2 - Ay_1) + y_2(Dy_2 - y_1)}{2B}$$

$$\boxed{w[P_1, P_2] = \int_{Q_1}^{Q_2} n dz + \frac{Ay_1^2 + Dy_2^2 - 2y_1 y_2}{2B}}$$

Tak więc, aby obliczyć drogę optyczną pomiędzy dwoma dowolnymi punktami leżącymi na płaszczyznach wejściowej i wyjściowej pewnego układu optycznego o znanych współczynnikach [ABCD] wystarczy raz całkować wzdłuż osi optycznej.